



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Specialistica in
Scienze Fisiche ed Astrofisiche

Tesi di Laurea

Modi collettivi in gas di Fermi superfluidi

Relatore: Prof. Francesco Matera

Laureando: Massimo Calamai

ANNO ACCADEMICO 2006–2007

Indice

Introduzione	1
1 Strumenti di base per lo studio di atomi fermionici	5
1.1 Cenni di Teoria dello <i>scattering</i>	6
1.2 Quando si usa la lunghezza di <i>scattering</i> al posto dell'interazione efficace. Pseudopotenziale	9
1.3 Risonanze di Fano-Feshbach	13
1.3.1 Osservazioni sperimentali di risonanze di Fano-Feshbach	16
1.4 Il gas degenere di Fermi	17
1.5 Approssimazione di Hartree-Fock	21
2 Sviluppo semi-classico	24
2.1 Fermioni indipendenti	25
2.2 Formalismo di base	26
2.3 La funzione di Wigner F	28
2.3.1 Evoluzione della funzione F	29
2.4 Le funzioni di Wigner <i>anomale</i> , $D \overline{D}$	34
2.4.1 Evoluzione della funzione \overline{D}	35
2.4.2 Evoluzione della funzione D	37
2.5 La funzione di Wigner \overline{F}	38
2.5.1 Evoluzione della funzione \overline{F}	38
2.6 Riepilogo	39
2.7 Trattazione usuale BCS	39
3 Gas all'equilibrio termodinamico: <i>crossover</i> BCS-BEC	43
3.1 Forma matriciale compatta	45
3.2 Ipotesi semplificative	48
3.3 Procedura di normalizzazione	52

3.4	Procedura numerica	53
3.5	<i>First sound</i>	61
4	Caso Dinamico: equazioni cinetiche	69
4.1	Termine di ordine zero	69
4.2	Linearizzazione	70
4.3	Frequenze dei modi collettivi	75
4.4	Calcolo dei poli di risonanza	79
4.5	Calcoli finali	82
	Conclusioni	86
	Bibliografia	87
A	Calcoli formali	91
A.1	Calcolo completo per l'evoluzione di $\hat{\psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}, t)$	91
A.2	Proprietà funzioni di Wigner	93
B	Potenziali	96
C	Suono	97

Elenco delle figure

1.1	<i>Scattering</i> di particelle identiche.	9
1.2	Potenziale d'interazione tra due atomi.	10
1.3	Curve di potenziale molecolare che illustrano il meccanismo delle risonanze di Fano-Feshbach.	14
1.4	Lunghezza di <i>scattering</i> del ${}^6\text{Li}$ in funzione di un campo magnetico esterno.	15
1.5	Termine di Hartree.	22
1.6	Termine di Fock.	22
3.1	<i>Plot</i> di $\mu^*(T, a_s)$ al variare di a_s , per alcuni valori della temperatura T	56
3.2	<i>Plot</i> di $\Delta(T, a_s)$ al variare di a_s , per alcuni valori della temperatura T	56
3.3	<i>Plot</i> di $\Delta(T, a_s)$ al variare di a_s nel limite $T \rightarrow 0$, in scala logaritmica.	57
3.4	<i>Plot</i> di $\Delta(T, a_s)$ al variare di T , per alcuni valori di a_s	57
3.5	<i>Plot</i> di $\Delta(T, a_s)$ al variare di T , per alcuni valori di a_s	58
3.6	Andamenti di $\Delta(T, a_s)$, e $\mu^*(T, a_s)$ nello spazio dei parametri T, a_s	59
3.7	Andamento della temperatura critica T_c in funzione della lunghezza di <i>scattering</i>	60
3.8	Andamento di $\mu^*(T, a_s)$ alla temperatura critica in funzione della lunghezza di <i>scattering</i>	60
3.9	Andamento di c_s^2/v_F^2 al variare di a_s a $T \approx 0$ senza e con il termine di Hartree-Fock.	65
3.10	<i>Plot</i> di c_s^2 al variare di a_s , per alcuni valori della temperatura T	66
3.11	<i>Plot</i> di c_s^2 al variare della temperatura T , per alcuni valori di a_s	67
3.12	Andamento di c_s^2 nello spazio dei parametri a_s e T	68
4.1	Poli di risonanza ω_1 e ω_2 , nel regime BCS.	80
4.2	Poli di risonanza ω_1 e ω_2 , nel regime BEC.	81
4.3	Poli di risonanza ω_1 e ω_2 , nel limite unitario.	82

Introduzione

Nell'ultimo decennio la fisica atomica alle basse temperature ha registrato una forte attività sperimentale e teorica. La prima realizzazione sperimentale di un condensato di Bose-Einstein (BEC) in un vapore diluito di atomi alcalini, avvenuta nel 1995 da tre gruppi sperimentali in maniera indipendente [1, 2, 3] ha di fatto aperto nuovi scenari di ricerca in questo campo. Negli anni successivi molti studi si sono concentrati sui gas bosonici, ovvero che hanno *spin* intero o nullo, con lo scopo di investigare l'importante conseguenza della condensazione di Bose-Einstein. Alcuni risultati conseguiti da questi studi riguardano ad esempio l'indagine delle caratteristiche superfluide del gas di bosoni, tra cui la natura idrodinamica delle oscillazioni collettive [4] e la realizzazione di vortici quantizzati [5].

Di pari passo l'attenzione degli sperimentali e dei teorici si è orientata verso lo studio dei gas di Fermi, ovvero aventi *spin* semintero. La statistica quantistica di Fermi-Dirac gioca un ruolo cruciale a basse temperature. Sebbene la scala di temperatura alla quale si raggiunge il regime di degenerazione quantistica per i fermioni o di condensazione per i bosoni sia la stessa

$$k_B T \approx \frac{\hbar^2 \rho^{2/3}}{m},$$

in cui k_B è la costante di Boltzmann, m la massa e ρ la densità del gas, e T è la temperatura, le conseguenze fisiche sono differenti. Nei gas di bosoni gli effetti statistici sono associati con la comparsa di una transizione di fase verso la condensazione di Bose, in cui una frazione macroscopica di particelle occupa un unico stato quantistico, quello a energia più bassa. Viceversa, in un sistema di fermioni non interagenti la temperatura di degenerazione quantistica misura una variazione continua tra il comportamento classico e quello degenere, in cui ogni atomo riempie dal fondamentale ogni livello permesso, per ciascuno dei quali ogni stato di *spin* può essere occupato da un sola particella. Quello che risulta per il gas degenere di fermioni non interagenti è il così detto “Mare di Fermi”. A differenza del caso dei bosoni, la comparsa di una fase superfluida caratterizzata da un *gap* nello spettro di

energia di eccitazione, può avvenire solo se è presente un'interazione attrattiva tra le particelle. Un'altra differenza tra i due gas riguarda i processi collisionali. In particolare, in un gas di Fermi con una sola componente definita di *spin*, lo *scattering* in onda-S è inibito a causa del principio di esclusione di Pauli. Questo effetto ha una conseguenza drammatica nei meccanismi di raffreddamento basati sulla tecnica di evaporazione [1] in cui la termalizzazione gioca un ruolo cruciale. Questo fatto ha reso più difficile il raggiungimento di basse temperature per i gas di Fermi, e quindi anche della degenerazione. Infatti la prima realizzazione sperimentale di un gas di Fermi si è avuta solo nel 1999 [6] impiegando un gas di Fermi con due componenti di *spin* con interazione negativa tra gli atomi. Un'altra tecnica per raggiungere la degenerazione è il raffreddamento simpatico [7] in cui si aggiunge un gas di Bose come termostato. Queste nuove tecniche di raffreddamento unite a nuove capacità di comprensione a livello teorico, stanno portando l'indagine sperimentale anche su fenomeni associati a sistemi più complessi come ad esempio miscele ultra-fredde di bosoni e fermioni [8, 9], condensati di molecole biatomiche [10, 11, 12], condensati in reticoli ottici [13].

Molti dei recenti risultati sperimentali nel campo della fisica dei gas ultra-freddi si basano essenzialmente sulla possibilità di controllare facilmente l'interazione tra le particelle: agendo su un campo magnetico esterno si cambia la lunghezza di *scattering* che gioca il ruolo di una forza efficace tra gli atomi. Questa condizione sperimentale esiste vicino alle così dette *risonanze* di Fano-Feshbach [14] (RFF). In questa maniera i sistemi atomici acquistano una notevole versatilità. I parametri fisici che si possono controllare in laboratorio sono, dunque, molteplici: basta citare la temperatura e la densità dei campioni, la composizione percentuale nelle miscele bosoni-fermioni, potenziali di vario tipo (potenziali a dimensionalità ridotta, potenziali periodici, etc.), e se sono presenti delle RFF l'interazione efficace tra gli atomi. Nel caso di gas diluiti in cui il *range* del potenziale interatomico è più piccolo della distanza fra le particelle, e a basse temperature, questo potenziale efficace può essere sostituito con una dipendenza esplicita dalla lunghezza di *scattering* in onda-S, grandezza che caratterizza gli urti tra due particelle a basse energie.

In quest'tesi analizzo il comportamento di un gas di Fermi in uno particolare stato della materia che è la superfluidità. Una teoria per comprendere il fenomeno della superfluidità a livello microscopico dei fermioni è stata formulata nel 1957 dai fisici Bardeen, Cooper e Schrieffer (BCS). La BCS fu introdotta per spiegare i fenomeni della superconduttività dei metalli a temperature vicino allo zero assoluto [15]. In poche parole quando è presente un'interazione attrattiva tra fermioni si formano nel

mare di Fermi delle coppie di particelle fortemente correlate [16]. L'energia finita del legame della coppia fornisce una spiegazione per il *gap* nello spettro di eccitazione.

Di recente grazie alle risonanze di Fano-Feshbach si può indagare sperimentalmente questo regime al variare della interazione efficace [17]. Variando la lunghezza di *scattering* a_s da valori negativi a valori positivi si passa da un regime di accoppiamento tra gli atomi di tipo BCS ad uno in cui si può formare un condensato di molecole biatomiche. Si ha un *crossover* BCS-BEC, cioè la connessione continua e liscia tra questi due regimi, e non una transizione di fase vera e propria. Il *crossover* BCS-BEC recentemente è stato studiato anche a livello sperimentale [17] per il ${}^6\text{Li}$. Il regime intermedio è caratterizzato da una forte interazione ed è stato studiato a livello sperimentale [18] sempre lavorando vicino a una risonanza di Fano-Feshbach. Esattamente alla risonanza $|a_s|$ ha una divergenza: in questo regime, detto unitario, il gas è allo stesso tempo diluito e fortemente interagente, nel senso che la lunghezza di *scattering* è più grande della distanza media interatomica. Tutte le scale di lunghezza associate con l'interazione scompaiono dal problema e ci si aspetta un comportamento universale del sistema indipendente dai dettagli del potenziale interatomico, ma solo dalla distanza media tra gli atomi.

In questa tesi studio alcuni aspetti legati al *crossover* BCS-BEC per un sistema di fermioni a temperatura finita con una tecnica particolare. In sostanza adotto un approccio semi-classico applicato all'evoluzione della trasformata di Wigner della matrice densità. Questa tecnica è stata largamente utilizzata nello studio dei processi collettivi in sistemi nucleari.

Questo lavoro di tesi è così organizzato: nel Capitolo 1 vengono richiamati aspetti della diffusione di particelle a basse energia, ponendo particolare attenzione al concetto di lunghezza di *scattering* e al suo uso nei modelli teorici come *pseudopotenziale di interazione*. Quindi parleremo del meccanismo delle risonanze di Fano-Feshbach, che in campo sperimentale ha permesso un salto in avanti nello studio dei gas degeneri; infine si ricorderanno i risultati principali relativi a un sistema di fermioni nello stato normale e si discuterà brevemente una approssimazione di campo medio per studiare a livello teorico questi sistemi quando si includono le interazioni. Nel Capitolo 2 chiariamo il significato di approssimazione semi-classica nel nostro caso. Ricaviamo le equazioni, che descrivono il sistema di fermioni in esame, attraverso uno studio delle evoluzioni temporali delle funzioni di Wigner. Infine ricordiamo la trattazione BCS del fenomeno della superfluidità dei fermioni. Nel Capitolo 3 analizziamo il caso di un gas di fermioni con *spin* $1/2$ all'equilibrio termodinamico e esponiamo i primi risultati numerici, sottolineando le differenze trovate rispetto a

studi pubblicati di recente; alla fine del capitolo analizziamo il primo modo collettivo, il suono isothermico, sottolineando i nuovi aspetti che emergono dal nostro studio. Infine nel Capitolo 4 analizziamo il sistema fuori dall'equilibrio termodinamico. In particolare otteniamo le equazioni in approssimazione lineare con cui si ricavano le relazioni di dispersione dei modi collettivi del sistema. Infine si mostrano gli integrali con cui si possono ottenere i modi collettivi del sistema.

Capitolo 1

Strumenti di base per lo studio di atomi fermionici

Il problema della superfluidità/superconduttività per sistemi fermionici rappresenta, da qualche decennio, un tema classico della fisica teorica moderna. Recenti esperimenti su atomi fermionici degeneri, cioè a temperature vicino allo zero assoluto, e su miscele atomiche bosoni-fermioni, hanno indotto nuovi studi teorici riguardanti questo fenomeno, che in precedenza era stato osservato per l'elio liquido ^3He , e per alcuni metalli.

La novità portata dai gas atomici riguarda la possibilità di avere un sistema in cui si possono controllare con precisione alcuni parametri caratteristici (come temperatura, densità e recentemente interazione efficace, etc.). Questa particolarità permette da un lato l'esplorazione sperimentale di nuovi fenomeni fisici e dall'altro il confronto diretto con le conclusioni delle teorie fenomenologiche.

In generale questi gas confinati sono composti da un numero considerevole di particelle¹. Con questi numeri non si può affrontare il problema risolvendo direttamente l'equazione di Schrödinger. Inoltre in un sistema composto da molte particelle gli effetti statistici non sono trascurabili.

Questo capitolo è così strutturato: dopo aver ricordato gli aspetti peculiari dell'interazione a due corpi § 1.1, in particolare introducendo il concetto di lunghezza di *scattering*, e analizzato le problematiche relative all'uso nei modelli teorici di questa grandezza § 1.2, si parlerà del meccanismo sperimentale che ha permesso un salto in avanti nello studio dei gas degeneri, cioè le risonanze di Fano-Feshbach § 1.3. Si ricorderanno i risultati principali relativi a un sistema di fermioni nello stato nor-

¹In laboratorio le popolazioni prodotte oscillano da 10^4 a 10^6 atomi, comunque ben lontani da una mole di gas, $\simeq 10^{23}$ particelle.

male § 1.4. Poi si tratterà brevemente di una approssimazione di campo medio per studiare a livello teorico questi sistemi quando si includono le interazioni § 1.5.

1.1 Cenni di Teoria dello *scattering*

In questa sezione passo in rassegna i concetti principali della teoria dello *scattering* elastico tra due particelle, e in particolare introduco la lunghezza di *scattering* [19]. Questa quantità caratterizza le interazioni a due corpi nel limite di basse energie e, come si vedrà nelle prossime sezioni, in certe circostanze può essere usato come unico parametro per descrivere le interazioni stesse.

Per semplicità considero la collisione di due particelle distinguibili senza *spin* di masse rispettivamente m_1, m_2 . Si passa alle coordinate del centro di massa e a quelle relative. La funzione d'onda che descrive il moto del centro di massa è l'onda piana; quella del moto relativo è la soluzione dell'equazione di Schrödinger

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_r} + V(\mathbf{r})\right) \Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}), \text{ dove } m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ è la massa ridotta.} \quad (1.1)$$

Si scrive la funzione d'onda per il moto relativo come somma di due termini: un'onda piana²

con velocità relativa lungo l'asse di *scattering* z e un'onda diffusa (*scattered*). Per la risoluzione dell'equazione di Schrödinger (1.1) sono utili le condizioni di simmetria: se il potenziale è sferico, la soluzione ha una simmetria assiale rispetto alla direzione della particella incidente. Dunque si cerca una soluzione che abbia la forma asintotica nel limite di grandi valori di r :

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}, \text{ con } k = \sqrt{\frac{2m_r E}{\hbar^2}}. \quad (1.2)$$

dove θ è l'angolo tra \mathbf{r} e z , e $f(\theta, \varphi) = f(\theta)$ data la scelta del potenziale sferico. La funzione $f(\theta)$ è l'ampiezza di diffusione che dipende in generale da E . Il suo significato fisico è legato alla definizione che segue: la probabilità che la particella diffusa con velocità v passi nell'unità tempo attraverso l'elemento di superficie $dS = r^2 d\Omega$ ($d\Omega$ è l'elemento di angolo solido attorno alla direzione θ) è uguale a $v|f|^2 d\Omega$. Il rapporto fra questa probabilità e la densità di corrente dell'onda incidente è la sezione d'urto differenziale:

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega. \quad (1.3)$$

²In questa sezione per l'onda piana si omette il fattore $L^{-3/2}$, dove L è il lato del box di normalizzazione, prendendo $L = 1$.

Si può fattorizzare la dipendenza da θ della funzione d'onda, e svilupparla in termini di un insieme completo di funzioni speciali³: in letteratura questo approccio si chiama sviluppo in onde parziali (con momento angolare definito). Dunque si ha:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos \theta) \frac{u_{kl}(r)}{r}, \quad (1.4)$$

dove $P_l(\cos \theta)$ sono i polinomi di Legendre. Quello che resta è un'equazione di Schrödinger unidimensionale per la funzione d'onda radiale $u_{kl}(r)$, con il potenziale centrifugo supplementare $\hbar^2 l(l+1)/2m_r r^2$ che dipende dal momento orbitale l considerato. A questo punto basta esprimere i coefficienti dello sviluppo A_l in modo che a grandi distanze la funzione $\Psi(\mathbf{r})$ abbia l'andamento asintotico voluto (1.2). Se il potenziale va a zero per $r \rightarrow 0$ più velocemente di $1/r$, nel limite "di campo lontano" si può trascurare sia il contributo dell'interazione⁴ che la barriera centrifuga: la soluzione radiale sarà una sinusoide con uno sfasamento δ_l :

$$u_{kl}(r) \simeq 2 \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right). \quad (1.5)$$

Usando questa espressione nella (1.4), e prendendo la forma asintotica dello sviluppo in onde sferiche dell'onda piana, si trova:

$$A_l = \frac{1}{2k} (2l+1) i^l e^{i\delta_l}. \quad (1.6)$$

Alla fine si ha l'espressione dell'ampiezza di *scattering* in termini degli sfasamenti δ_l :

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta). \quad (1.7)$$

Adesso sostituendo questa relazione nella (1.3), integrando su tutto l'angolo solido e usando la relazione di ortogonalità dei polinomi di Legendre, posso esprimere la sezione d'urto totale in funzione degli sfasamenti.

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (1.8)$$

Ogni termine della somma rappresenta la sezione d'urto parziale σ_l per un dato momento orbitale l . Si può mostrare⁵ che nel limite di basse energie gli sfasamenti vanno come k^{2l+1} e dunque ogni sezione d'urto parziale diminuisce come k^{4l} al

³In cui l'energia di ciascuno stato è $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r}$, ciascuno abbia momento orbitale l , e proiezioni nulle sull'asse z .

⁴L'andamento $1/r$ si ha, ad esempio, per le interazioni di tipo Coulombiano.

⁵È vero per i potenziali a corto raggio d'azione, mentre per i potenziali che decadono come r^{-n} è vero per $l < (n-3)/2$.

diminuire di k . La sezione d'urto totale è dominata per $k \rightarrow 0$ dal termine $l = 0$: è lo *scattering* in onda-S. Posso formalmente scrivere il suo andamento per basse energie:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma_0(k) = 4\pi a_s^2, \quad (1.9)$$

in cui si è definito lunghezza di *scattering* a_s come:

$$a_s = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\tan \delta_0(k)}{k}. \quad (1.10)$$

Studiando l'andamento della sezione d'urto in onda-S in funzione dell'energia si trova che questa funzione ha un massimo per $ka_s \gg 1$: in letteratura questo regime è chiamato *limite unitario*.

$$\sigma_0(k) = \frac{4\pi a_s^2}{1 + k^2 a_s^2} \simeq \begin{cases} 4\pi a_s^2 & \text{per } ka_s \ll 1 \\ 4\pi/k^2 & \text{per } ka_s \gg 1 \end{cases}. \quad (1.11)$$

Si considera adesso lo *scattering* tra particelle identiche nello stesso stato intrinseco. Ogni particella avrà perciò la stessa massa m e lo stesso *spin*. Lo *spin* della particella determina il suo comportamento statistico (teorema *spin*-statistica). Se questo risulta intero l'atomo si comporterà come un bosone ovvero segue la statistica di Bose-Einstein; se è semintero l'atomo fermionico segue la statistica di Fermi-Dirac. Come conseguenza la funzione d'onda (1.2) deve essere simmetrica sotto lo scambio delle coordinate delle due particelle se sono bosoni, antisimmetrica se sono fermioni. Interscambiare le coordinate delle due particelle equivale a cambiare il segno della coordinata relativa $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, ovvero in coordinate polari $r \rightarrow r$, $\theta \rightarrow \pi - \theta$ e $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$, dove φ è l'angolo azimutale. La funzione d'onda (1.2) simmetrizzata o antisimetrizzata, se le particelle sono nello stesso stato di *spin*, è dunque:

$$\Psi_a^s(r, \theta) = e^{ikz} \pm e^{-ikz} + [f(\theta) \pm f(\pi + \theta)] \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (1.12)$$

L'ampiezza per la diffusione di una particella nella direzione individuata dall'angolo polare θ è data perciò da $[f(\theta) \pm f(\pi + \theta)]$, e la sezione d'urto differenziale è data da

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta) \pm f(\pi + \theta)|^2, \quad (1.13)$$

in cui il segno $+$ si applica ai bosoni e il $-$ ai fermioni.

Il contenuto fisico dell'equazione (1.13) risiede nel fatto che l'ampiezza di probabilità per una particella di essere diffusa in una direzione fissata, è la somma o la differenza dell'ampiezza per una delle particelle di essere diffusa attraverso l'angolo

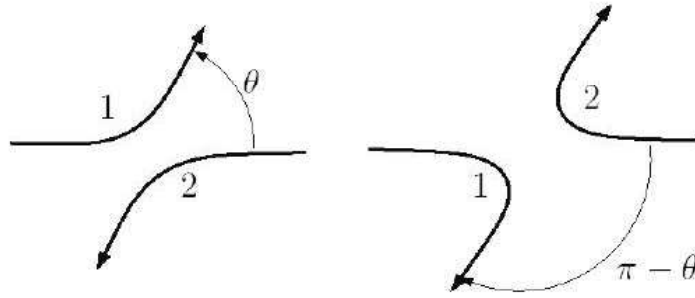


Figura 1.1: *Scattering* di particelle identiche: i due processi sono indistinguibili. Le ampiezze di *scattering* $f(\theta)$, $f(\pi + \theta)$ si devono sommare per i bosoni e sottrarre per i fermioni.

θ , e l'ampiezza per l'altra particella di essere diffusa attraverso l'angolo $\pi - \theta$. La sezione d'urto totale è ottenuta integrando la sezione d'urto differenziale su tutti gli stati finali distinti. Dunque se lo *scattering* è solamente in onda-S, la sezione d'urto totale per particelle identiche con lo stesso valore della proiezione dello *spin*, nel limite di basse energie, diventa:

$$\sigma_0(k) = \begin{cases} 8\pi a_s^2 & \text{per i bosoni} \\ 0 & \text{per i fermioni} \end{cases} \quad (1.14)$$

Nella prossima sezione introduco il concetto di interazione efficace e mostro com'è legato alla lunghezza di *scattering*.

1.2 Quando si usa la lunghezza di *scattering* al posto dell'interazione efficace. Pseudopotenziale

Nella sezione precedente si è visto come la diffusione di particelle a basse energie non dipende in maniera esplicita dalla forma del potenziale, ma soltanto dalla lunghezza di *scattering* a_s . In questa sezione descrivo le condizioni in cui sia lecito passare dal vero potenziale a un potenziale efficace, e da quest'ultimo direttamente alla grandezza a_s .

È noto che le interazioni tra atomi neutri sono forti quando questi sono molto vicini, e deboli quando sono lontani. A piccole distanze relative l'interazione è

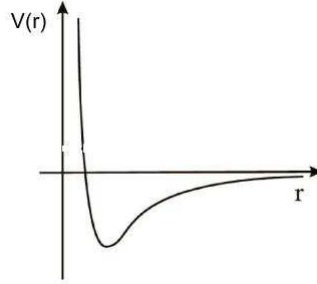


Figura 1.2: Potenziale d'interazione tipico tra due atomi. Nel caso del Litio il minimo si ha per $r \simeq 30a_0$, dove $a_0 = \hbar^2/m_e e^2$ è il raggio di Bohr.

repulsiva perché non è possibile sovrapporre spazialmente le nuvole elettroniche⁶; è attrattiva a lungo raggio per via degli effetti dovuti ai momenti di dipolo elettrico indotti⁷ [20]. Infine si ha un minimo quando i due andamenti a corto e a lungo raggio si bilanciano, vedi Fig. 1.2. In generale la forma del potenziale reale non è conosciuta, non c'è motivo perché sia una funzione analitica semplice, per cui si usano dei potenziali modello, che possano essere utili allo scopo. Per esempio un potenziale che si adatta bene a tutti i valori di r è il potenziale di Lennard-Jones:

$$V(r) = 4V_{min} \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right] \quad (1.15)$$

dove V_{min} è il valore minimo del potenziale, r_0 è il raggio per cui si annulla $V(r)$.

In questa tesi si vuole studiare un gas diluito, ovvero in cui il raggio caratteristico dell'interazione r_0 è molto più piccolo della distanza media interatomica. Per la maggior parte delle configurazioni la funzione d'onda del sistema varierà nello spazio in maniera lenta; ma subirà una rapida variazione spaziale locale quando due atomi subiranno una mutua collisione. In sostanza per evitare il calcolo dettagliato delle correlazioni su distanze corte è conveniente introdurre un potenziale efficace. Questo potenziale descrive le interazioni fra i gradi di libertà a bassa frequenza e a grandi lunghezze d'onda quando gli accoppiamenti di questi gradi di libertà con quelli a lunghezze d'onda più corte sono stati presi in considerazione. Si dice che si è *integrato*

⁶È una conseguenza diretta del Principio di esclusione di Pauli.

⁷È l'interazione di Van der Waals che ha la forma

$$V(r) = -\frac{C_6}{r^6} - \frac{C_8}{r^8} - \frac{C_{10}}{r^{10}} + \dots,$$

dove r è la separazione atomica.

via i gradi di libertà più “veloci” ed è rimasta la dipendenza dai gradi di libertà più “lenti”.

Per chiarire questo concetto esporrò schematicamente il procedimento che determina un potenziale efficace.

Considero nuovamente il problema della diffusione di due particelle, ma questa volta nella rappresentazione degli impulsi. Le particelle sono identiche per cui $m_r = m/2$. La funzione d'onda soddisfa l'equazione di Schrödinger:

$$\Psi(\mathbf{k}') = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) + \Psi_{\text{sc}}(\mathbf{k}') \quad (1.16)$$

$$\left(\frac{\hbar^2 k^2}{m} - \frac{\hbar^2 k'^2}{m} \right) \Psi_{\text{sc}}(\mathbf{k}') = V(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{k}''} V(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') \Psi_{\text{sc}}(\mathbf{k}'') \quad (1.17)$$

in cui \mathcal{V} è il volume, $\frac{\hbar^2 k^2}{m} = E$ è l'autovalore dell'energia e $V(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') = V(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'')$ è la trasformata di Fourier dell'interazione atomo-atomo. Risolvendo formalmente l'equazione di Schrödinger si giunge all'equazione ricorsiva per la matrice di *scattering* T : l'equazione di Lippmann-Schwinger.

$$\Psi_{\text{sc}}(\mathbf{k}') = \left(E - \frac{\hbar^2 k'^2}{m} + i\delta \right)^{-1} T(\mathbf{k}', \mathbf{k}; E) \quad (1.18)$$

$$T(\mathbf{k}', \mathbf{k}; E) = V(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{k}''} V(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') \left(E - \frac{\hbar^2 k''^2}{m} + i\delta \right)^{-1} T(\mathbf{k}'', \mathbf{k}; E) \quad (1.19)$$

in cui si è aggiunta una parte immaginaria $i\delta$ all'energia per garantire il fatto che è presente solo l'onda uscente. Al solito cerchiamo l'andamento asintotico per la funzione d'onda diffusa: nel limite in cui l'energia tende a zero ($E = k = 0$) si può determinare tramite la (1.18) la relazione tra la lunghezza di *scattering* e la matrice T .

$$a = -\frac{mT(0, 0; 0)}{4\pi\hbar^2} \quad (1.20)$$

Per esempio nel caso in cui $|V| \ll E$ c'è una relazione semplice che lega l'ampiezza di scattering con il potenziale. Infatti in queste condizioni si può usare l'approssimazione di Born: ovvero si prende solo il primo termine del secondo membro dell'equazione Lippmann-Schwinger, la lunghezza a_s è legata alla trasformata di Fourier del potenziale con numero d'onda, impulso trasferito, nullo:

$$a_s \text{Born} = \frac{m}{4\pi\hbar^2} V(0) = \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r} V(\mathbf{r}). \quad (1.21)$$

In questo senso si può considerare la matrice T come una interazione efficace: dà il risultato corretto nel caso di gas diluiti, ovvero quando è giusto considerare l'approssimazione di Born per l'espressione di $\Psi_{\text{sc}}(\mathbf{r})$. Tutti gli effetti delle componenti

a lunghezze d'onda corte della funzione d'onda, che riflettono le correlazioni tra le due particelle, sono stati implicitamente presi in considerazione sostituendo $V(0)$ con T .

Si può raffinare il concetto adottando un altro punto di vista. Si divide gli stati intermedi nell'equazione Lippmann-Schwinger in due gruppi: quelli con energia più grande di un dato *cut-off* $\varepsilon_c = \hbar^2 k_c^2/m$, e i restanti con energia inferiore. Si può fare la somma sugli stati intermedi nella (1.19) in due passi. Prima si fa la somma su tutti gli stati intermedi con energia maggiore di ε_c , e poi sugli stati rimanenti. Il primo passo conduce a una quantità $\tilde{V}(\mathbf{k}', \mathbf{k}; E)$ che soddisfa l'equazione:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\mathbf{k}', \mathbf{k}; E) &= V(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \\ &+ \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{k}'' (k'' > k_c)} V(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') \left(E - \frac{\hbar^2 k''^2}{m} + i\delta \right)^{-1} \tilde{V}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}; E), \end{aligned} \quad (1.22)$$

e il secondo passo costruisce le correlazioni associate con gli stati con energia più bassa:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{k}', \mathbf{k}; E) &= \tilde{V}(\mathbf{k}', \mathbf{k}; E) \\ &+ \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{k}'' (k'' < k_c)} \tilde{V}(\mathbf{k}', \mathbf{k}''; E) \left(E - \frac{\hbar^2 k''^2}{m} + i\delta \right)^{-1} T(\mathbf{k}'', \mathbf{k}; E). \end{aligned} \quad (1.23)$$

L'ultima equazione mostra che se si usa \tilde{V} come l'interazione in un problema di *scattering* in cui gli stati intermedi con energia maggiore di ε_c non appaiono in maniera esplicita, allora si riproduce la matrice di scattering corretta. In questo senso è una interazione efficace, che descrive le interazioni per stati a basse energie. È importante osservare che il potenziale efficace dipende in maniera esplicita dalla scelta dell'energia ε_c . Comunque, il risultato finale per l'ampiezza di *scattering* è indipendente da questa scelta.

Se si fa il limite $k_c \rightarrow 0$, l'interazione efficace si riduce alla matrice T . Per piccoli k_c , cioè quando si descrive le interazioni a basse energie, l'interazione efficace diventa semplicemente [21]

$$\tilde{V}(0, 0; 0)|_{k_c \rightarrow 0} = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (1.24)$$

Nel limite opposto $k_c \rightarrow \infty$ l'interazione efficace ritorna ad essere l'interazione vera, perché non si è integrato su alcun grado di libertà.

1.3 Risonanze di Fano-Feshbach

Recenti risultati sperimentali nel campo della fisica dei gas ultra-freddi si basano essenzialmente sulla possibilità di variare la lunghezza di *scattering* con un campo magnetico esterno. Questa condizione sperimentale esiste vicino alle così dette *risonanze* di Fano-Feshbach [14].

Storicamente le risonanze di Fano-Feshbach sono state studiate per la prima volta nell'ambito della fisica nucleare [22]. Nello studio della fisica degli atomi ultra-freddi, invece, questo fenomeno è usato per controllare la forza delle interazioni atomiche efficaci, variando in maniera opportuna solo l'intensità del campo magnetico esterno. Per alcuni atomi si riesce in laboratorio a passare da regimi di interazione molto debole a regimi di interazione molto forte, ovvero vicini al *limite unitario*. In più mediante una risonanza di Fano-Feshbach si riesce a controllare il *segno* della lunghezza di *scattering*, grandezza che determina se le interazioni tra gli atomi sono attrattive ($a_s < 0$) o repulsive ($a_s > 0$).

Nel paragrafo precedente ho analizzato il caso in cui ciascuna particella non aveva gradi di libertà interni: si poteva parlare di *scattering* elastico a canale singolo. In generale lo *scattering* atomo-atomo è multi-canale: per esempio nel caso di atomi alcalini, cioè con un solo elettrone di valenza, ogni molecola può avere molti sottolivelli iperfini o di struttura Zeeman⁸, ciascuno con la propria curva di potenziale molecolare (vedi Fig. 1.3). In questa ottica ogni asintoto per $r \rightarrow \infty$ rappresenta un canale di collisione, cui è associato un *set* di numeri quantici per indicare lo stato di ciascun atomo.

Per semplicità si considerano due curve di potenziale relative a due livelli *Zeeman*, lo stato fondamentale e il primo stato eccitato. Suppongo che gli atomi iniziano una collisione (elastica) nel canale più basso, cioè con energia più piccola del primo stato eccitato. È evidente che per la conservazione dell'energia non possono uscire dalla collisione nel canale più alto. Per questo il primo viene chiamato *canale aperto* e il secondo *canale chiuso*.

Il fenomeno della risonanza di Fano-Feshbach avviene se esiste uno stato legato a bassa energia nel canale chiuso: in queste condizioni lo *scattering* nel canale aperto viene alterato in maniera drammatica. Ciò che accade è molto simile a un processo atomico del secondo ordine: in questo caso gli atomi che collidono possono fare una transizione verso questo stato legato (metastabile), starci per un certo tempo, per

⁸A tale proposito bisogna ricordare che nei processi di collisione tra atomi freddi la separazione tra i livelli è generalmente molto maggiore dell'energia cinetica degli atomi.

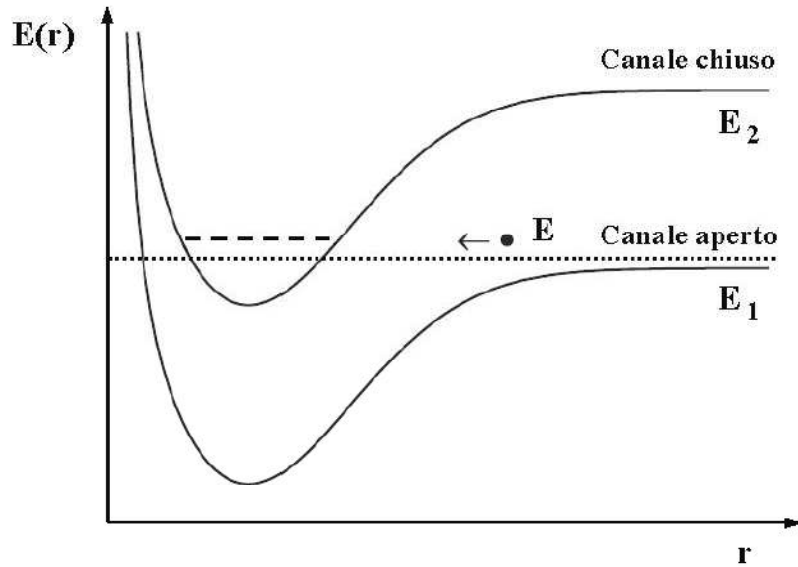


Figura 1.3: Andamenti dei potenziali molecolari dello stato fondamentale e di quello eccitato in funzione della distanza fra gli atomi che collidono. L'energia totale di collisione, E (linea punteggiata), è appena sopra l'energia di soglia del canale aperto E_1 ed è quasi risonante con uno stato legato del canale chiuso (linea tratteggiata). Si assume che la differenza fra le energie di soglia del canale chiuso e di quello aperto ($\Delta E = E_2 - E_1$) sia molto più grande dell'energia cinetica di collisione ($E - E_1$): le collisioni con uscita nel canale chiuso sono proibite per la conservazione dell'energia.

poi ritornare nel canale aperto dopo la collisione. Il tempo che il sistema passa nello stato legato dipende dalla separazione energetica dei livelli in gioco. Come per i fenomeni risonanti più l'energia si avvicina a quella dello stato legato, più grande è l'effetto: all'uguaglianza perfetta corrisponde una lunghezza di *scattering* infinita e si parla di diffusione risonante. In questa maniera sperimentalmente si può raggiungere il *limite unitario*.

Se i momenti magnetici della coppia di atomi nei due canali sono differenti allora si può variare la posizione relativa delle due curve di potenziale in maniera continua, appunto tramite il campo magnetico esterno. Per cui variandone l'intensità, e quindi cambiando la separazione dei livelli Zeeman, in alcuni sistemi è possibile spostare l'energia dello stato legato fino a farla coincidere con quella di soglia.

In generale si può passare da una condizione in cui lo stato legato nel canale chiuso è appena sotto la soglia dello spettro continuo nel canale aperto alla condizione opposta in cui lo stesso stato legato è appena sopra soglia. La transizione tra

queste due situazioni si ha per un certo valore del campo magnetico B_0 . Nel caso di una transizione solo tra due livelli è stato dimostrato che la lunghezza di diffusione si può porre con la seguente dipendenza dal campo applicato B [21]:

$$a(B) = a_\infty \left(1 - \frac{\Delta_B}{B - B_0} \right), \quad (1.25)$$

dove a_∞ il valore della lunghezza di diffusione lontano dalla risonanza e Δ_B è la larghezza della risonanza.

Per $B - B_0 < \Delta_B$, ovvero all'interno della risonanza, è possibile cambiare il segno ed il modulo di a_s , fino ad annullare completamente le interazioni efficaci per $B - B_0 = \Delta_B$ ($a_s = 0$). In particolare se lo stato è appena sotto soglia la lunghezza di *scattering* sarà grande e positiva, e nel caso opposto sarà grande e negativa.

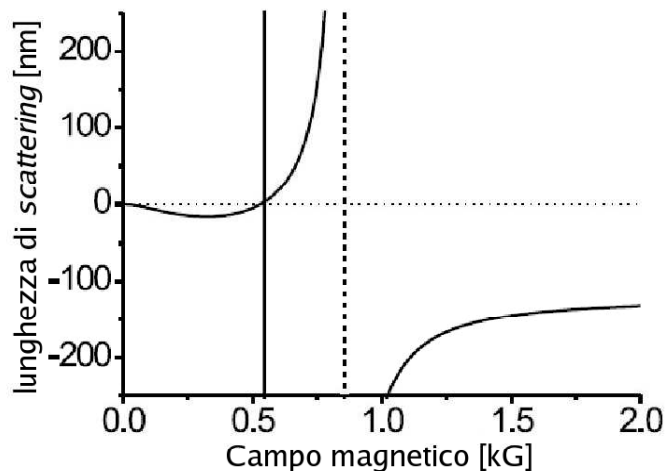


Figura 1.4: Dipendenza dal campo magnetico esterno della lunghezza di *scattering* nel caso del ${}^6\text{Li}$. Si osservano due risonanze di Fano-Feshbach: una larga a $B_0 \simeq 834$ G e una stretta a $B_0 \simeq 543$ G (che non si può risolvere a questa scala, cfr. [18]).

Questo effetto è stato sfruttato nello studio delle proprietà collisionali sia di gas bosonici [23] sia di gas fermionici [24], e nella stabilizzazione di un condensato di Bose con lunghezza di *scattering* negativa [25]. Il principale traguardo raggiunto grazie alle risonanze di Fano-Feshbach resta la produzione di molecole ultra-fredde, a partire sia da gas atomici bosonici [26], che fermionici [10]. Solo negli ultimi anni sono state osservate risonanze di Fano-Feshbach anche in miscele atomiche bosoni fermioni ultra-fredde [8, 9].

1.3.1 Osservazioni sperimentali di risonanze di Fano-Feshbach

La prima osservazione sperimentale di una risonanza di Fano-Feshbach (RFF) in ambito della materia condensata è avvenuta nel 1998 [27], in un condensato di Bose-Einstein di atomi di sodio in trappola ottica e spin polarizzati. Da allora sono state osservate molte altre risonanze fra atomi di una sola specie atomica (omeonucleari). Solo negli ultimi anni si sta sviluppando l'interesse anche a risonanze eteronucleari.

Ricordo il caso del ^{85}Rb : l'utilizzo delle RFF ha permesso di portare la specie atomica alla condensazione di Bose-Einstein stabile. Infatti il ^{85}Rb ha una lunghezza di *scattering* negativa, che non permette la produzione di un condensato stabile: utilizzando una RFF è stato possibile invertirne il segno [23]. Si è subito aperta la possibilità offerta dalle RFF di nuovi studi: il controllo delle interazioni ha permesso di portare un condensato di ^{85}Rb nella regione di instabilità, cioè passando da una interazione repulsiva ad una attrattiva, e di studiarne la dinamica del collasso [25]. Tale fenomeno, per un condensato confinato in un potenziale e caratterizzato da interazione attrattiva, avviene quando il numero di atomi supera un certo valore critico; il sistema invece è stabile per un numero di atomi minore.

Successivamente le RFF omonucleari sono state osservate in gas di Fermi e le prime osservazioni sono state effettuate per atomi di ^{40}K [24]. Il meccanismo delle RFF è stato utilizzato per produrre molecole ultrafredde, permettendo inizialmente la formazione di molecole costituite da bosoni (*composite boson*), come nel caso del ^{133}Cs [28], e poi di molecole bosoniche costituite da atomi fermionici di ^{40}K [10] e di ^6Li [29, 30, 31]. Il passo successivo alla produzione di molecole bosoniche formate da atomi fermionici è stata la produzione di condensati di Bose-Einstein molecolari [11, 12, 32], ottenuti partendo da gas fermionici sufficientemente degeneri. Di pari passo diverse proposte teoriche sono state formulate per realizzare la superfluidità di fermioni in presenza delle RFF [33] e per studiare la natura del superfluido al variare delle interazioni [34]. In corrispondenza di una RFF viene prevista l'evoluzione da un regime di accoppiamento di tipo BCS, in cui una frazione di fermioni in prossimità dell'energia di Fermi forma coppie di Cooper⁹, ad uno di BEC di molecole di fermioni. La regione in cui si formano le molecole è quella con interazione per cui ($a_s > 0$), mentre le coppie di Cooper si formano nella regione di interazione per cui ($a_s < 0$). Dopo la formazione di condensati di molecole da atomi fermionici [11, 12, 32], che permette di studiare il regime BEC, sono state effettuate osservazioni sperimentali anche nel regime di tipo BCS, per coppie di atomi di ^{40}K [35] e di ^6Li [36, 37]. Un

⁹Una coppia di Cooper è composta da due fermioni con vettori d'onda e spin opposti.

risultato sperimentale raggiunto di recente sullo studio della superfluidità è stata l'osservazione dei vortici stabili in un gas di Fermi di ${}^6\text{Li}$ in rotazione, in un regime di interazione forte [38].

Più di recente, infine, sono state osservate anche risonanze eteronucleari in miscele di fermioni e bosoni, ad esempio ${}^6\text{Li}$ - ${}^{23}\text{Na}$ [39]. Lo studio di queste risonanze può permettere di migliorare la conoscenza dei potenziali intermolecolari determinando la lunghezza di *scattering* interatomica, di produrre molecole eteronucleari nello stesso regime di temperatura degli atomi e di osservare il collasso della miscela Bose-Fermi. Fino ad ora, infatti, molecole eteronucleari sono state prodotte con metodi di fotoassociazione [40]. Con questi metodi non si riescono a raggiungere temperature molto basse come è possibile raggiungere con i metodi che utilizzano le risonanze di Fano-Feshbach. Queste molecole eteronucleari, a differenza di quelle omonucleari, sono molecole fermioniche e sono polari. Il momento di dipolo elettrico di queste molecole permetterebbe di studiare le proprietà di gas dipolari degeneri, caratterizzati da forze di interazione anisotrope, aprendo nuove possibilità di ricerca nella fisica dei gas atomici ultra-freddi. L'altro campo che può essere studiato con le risonanze di Fano-Feshbach è la dinamica del collasso fra miscela Bose-Fermi. Questo tipo di studio è interessante perché permette di modificare le proprietà di ciascuna specie atomica per effetto dell'interazione fra le due; per le particelle fermioniche, in particolare, grazie all'interazione attrattiva con i bosoni è possibile vincere la repulsione efficace fra i fermioni, la pressione di Fermi, e portare il gas di Fermi al collasso [41].

1.4 Il gas degenere di Fermi

Se la temperatura di un gas ideale (a una data densità) è sufficientemente bassa, la statistica di Boltzmann diventa inapplicabile, e si devono usare differenti teorie nelle quali il numero medio di occupazione dei vari stati di occupazione di singola particella non è supposto piccolo.

Le statistiche quantistiche differiscono secondo il tipo di funzione d'onda che descrive il gas, quando viene visto come un sistema di N particelle identiche. Nel caso dei fermioni, che hanno *spin* semintero, il sistema è descritto da una funzione d'onda antisimmetrica rispetto allo scambio di qualsiasi coppia di particelle.

Per un sistema di particelle descritto da una funzione d'onda antisimmetrica è operante il *principio di Pauli*: in ogni stato non ci può stare simultaneamente più di una particella.

Quindi la configurazione del sistema a temperatura nulla vedrà gli N stati di energia più bassa tutti occupati, e i successivi tutti vuoti. Aumentando la temperatura del gas, alcune particelle andranno a occupare i livelli superiori, in precedenza vuoti; tuttavia, se la temperatura rimane bassa, non vi sarà abbastanza energia per spostare le particelle che si trovano nei livelli più profondi (*Pauli Blocking*), e quindi cambierà energia solo una piccola frazione di particelle, e precisamente quelle la cui energia è prossima a quella del più alto livello occupato. L'energia ε_F di tale livello è una grandezza caratteristica del sistema, ed è detta *energia di Fermi*.

Tutte queste conclusioni si possono ricavare in maniera quantitativa a partire dai potenziali termodinamici che si possono ricavare da studi statistici di un insieme di fermioni. Nella seguente discussione delle proprietà di un gas di Fermi, e nel proseguimento di questa mia tesi userò la notazione semplificata

$$\beta = (k_B T)^{-1} \quad (1.26)$$

in cui k_B è la costante di Boltzmann, e T è la temperatura.

L'equazione base è il numero medio di occupazione di uno stato di singola particella di impulso p per ogni stato di *spin* (per fermioni non polarizzati).

$$\bar{n}_p = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_p - \mu)} + 1}, \quad (1.27)$$

in cui μ è il potenziale chimico. Lo spettro di energia è quello di un insieme di fermioni non interagenti non relativistici:

$$\varepsilon_p = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (1.28)$$

Si assume che l'insieme di particelle è contenuto in un volume grande, per cui alle somme sui singoli livelli discreti di particella singola si può sostituire l'integrale sui numeri d'onda. Per semplicità mi riferirò a fermioni con *spin* 1/2, per cui la degenerazione di ogni stato di singola particella di impulso definito è 2. Posso scrivere l'energia totale come:

$$E = \sum_p \bar{n}_p \varepsilon_p = \frac{2\mathcal{V}}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}, \quad (1.29)$$

in cui \mathcal{V} è il volume. Da considerazioni termodinamiche si ricava l'espressione per l'equazione di stato di un gas ideale di Fermi,

$$P\mathcal{V} = \frac{2}{3}E \quad (1.30)$$

In analogia con (1.29) si ricava l'equazione che dà il numero di particelle:

$$\frac{N}{\mathcal{V}} = \frac{2}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \quad (1.31)$$

Sebbene le tre equazioni precedenti determinano le variabili termodinamiche di un gas di Fermi come funzioni di T , \mathcal{V} e μ , la (1.31) può in principio essere invertita per ottenere il potenziale chimico in funzione del numero N di particelle.

Si consideri la funzione di distribuzione \bar{n}_p . L'equazione (1.27) mostra che la condizione $\bar{n}_p \leq 1$ è garantita per tutti i valori di μ e T . Nel limite di alte temperature o limite classico, si trova

$$\bar{n}_p = e^{\beta(\mu-\varepsilon)} \quad (1.32)$$

che è la distribuzione di Boltzmann. A differenza dei bosoni il potenziale chimico può diventare positivo, quando si riduce la temperatura, partendo dal limite classico. Ora si vede cosa succede alla distribuzione di Fermi nel quando la temperatura tende allo zero assoluto. Si vede subito che:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \bar{n}_p = \begin{cases} 1 & \text{per } \varepsilon_p < \mu \\ 0 & \text{per } \varepsilon_p > \mu \end{cases} = \theta(\mu - \varepsilon_p). \quad (1.33)$$

ovvero si riduce a una funzione a gradino. Questo comportamento è proprio quello che ci si aspettava: lo stato del sistema con energia più bassa è ottenuto riempiendo i livelli di energia fino a

$$\mu = \varepsilon_F \text{ quando } T = 0. \quad (1.34)$$

Dunque il potenziale chimico di un gas ideale di Fermi a temperatura zero è un numero positivo finito, uguale all'energia di Fermi. Infatti se si aggiungesse una particella al sistema, si potrebbe fare solo *fornendo* alla particella un'energia superiore alla massima, cioè ε_F .

Ricordo alcune proprietà di un gas ideale di Fermi a $T = 0$. La densità è data da

$$\frac{N}{\mathcal{V}} = \frac{2}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\mu d\varepsilon \varepsilon^{\frac{1}{2}} \quad (1.35)$$

a causa della forma della funzione di distribuzione. Valutando l'integrale ed invertendo la relazione si trova l'espressione dell'energia di Fermi in funzione della densità

$$\varepsilon_F \equiv \mu(T = 0) = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \rho^{2/3} \equiv \frac{p_F^2}{2m} \quad (1.36)$$

in cui $\rho = \frac{N}{\mathcal{V}}$ è la densità, e p_F è l'impulso di Fermi. Quindi l'energia di Fermi cresce con la densità delle particelle ed è inversamente proporzionale alla loro massa. In maniera simile si ricava l'energia totale del sistema.

$$\frac{E}{\mathcal{V}} = \frac{2}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\mu d\varepsilon \varepsilon^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{5} \mu^{\frac{5}{2}} \quad (1.37)$$

Combinando i risultati si giunge alla relazione:

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{5} \mu = \frac{3}{5} \varepsilon_F, \quad (1.38)$$

e all'equazione di stato

$$P = \frac{2}{5} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m} \rho^{\frac{5}{3}}, \quad (1.39)$$

la quale mostra che un gas di Fermi esercita una pressione positiva finita anche a temperatura zero. Questo perché vi è come se vi fosse una forza repulsiva fra i fermioni dovuta in sostanza al principio di esclusione di Pauli.

Adesso guardo cosa succede quando la temperatura cresce. Poichè la scala della temperatura è fissata dalla temperatura di Fermi:

$$T_F = \frac{\varepsilon_F}{k_B} = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2mk_B} \rho^{2/3}, \quad (1.40)$$

si parlerà di basse temperature, e quindi di sistema molto vicino allo stato degenere, quando:

$$T \ll T_F, \quad (1.41)$$

mentre per $T \gg T_F$ il comportamento tenderà al limite classico. Nel caso di temperatura piccola ma finita, qualche risultato interessante si ottiene se si opera uno sviluppo in serie di potenze di $\zeta = T/T_F$ delle grandezze (1.30) (1.31). Ecco come cambia l'equazione di stato:

$$P\mathcal{V} = \frac{2\mathcal{V}}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \left[\frac{2}{5} \mu^{\frac{5}{2}} + \varepsilon_F^2 \zeta^2 \frac{\pi^2}{8\mu^{\frac{1}{2}}} + \dots \right] \quad (1.42)$$

Con questa equazione si ricava il numero di particelle:

$$N = \left. \frac{\partial P\mathcal{V}}{\partial \mu} \right|_{T\mathcal{V}}, \quad (1.43)$$

con cui posso trovare l'andamento del potenziale chimico in funzione della temperatura:

$$\mu = \varepsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \zeta^2 + \dots \right]. \quad (1.44)$$

Concludo il paragrafo con un calcolo dell'ordine di grandezza della temperatura di Fermi relativa a un esperimento sui vapori di atomi fermionici confinati. Le grandezze sono relative all'esperimento descritto in [31]. In questo esperimento il gas è composto da atomi di ${}^6\text{Li}$, che è un fermione: la massa è $m = 9,991 \times 10^{-24}$ g, la densità raggiunta nell'esperimento è dell'ordine di 10^{14} cm $^{-3}$: pertanto $T_F = 8,3$ μK . Siccome la temperatura ambiente (300 K) è molto più grande della temperatura di Fermi relativa a questo caso particolare, bisogna "rallentare" gli atomi perché si trovino nel limite di degenerazione quantistica.

Il gas di Fermi non interagente può rappresentare un'utile prima approssimazione per diversi sistemi fermionici. Comunque per avere una conoscenza dettagliata dei comportamenti di tali sistemi si devono includere le interazioni tra le particelle. Un utile primo passo è dato dall'approssimazione di Hartree-Fock, che viene ricordata nella prossima sezione.

1.5 Approssimazione di Hartree-Fock

Le teorie di campo medio hanno un ruolo importante nello studio di sistemi a molti corpi. In questo ambito l'approssimazione detta di *Hartree-Fock* dà buoni risultati per i sistemi di fermioni. In questa sezione riporto le idee di base dell'approssimazione, che consiste in una descrizione del sistema interagente in termini di singola particella, che si muove nel campo medio generato dalle restanti particelle.

Ogni particella si muove in un potenziale ad un corpo non dipendente dal tempo. Questa approssimazione presenta una condizione di autocompatibilità in quanto essa determina energia e numero d'occupazione di ogni livello di particella singola in funzione della distribuzione nei vari livelli dei costituenti del sistema.

Per semplicità ci si riferisce ad un sistema omogeneo per il quale è appropriata la rappresentazione degli impulsi. Inoltre per semplicità si assume un'interazione indipendente dall'eventuale *spin* σ . La quantità rilevante del procedimento è la *self-energy* $\Sigma^*(\mathbf{k}, \tau_1, \tau_1')$ [42], che risulta istantanea $\delta(\tau_1 - \tau_1')$ nell'approssimazione di Hartree-Fock. Il punto di partenza è l'ordine più basso per Σ^* ,

$$\begin{aligned} \Sigma_H^* &= \delta(\tau_1 - \tau_1') \sum_{\gamma} \langle \alpha\gamma | \hat{V} | \alpha'\gamma \rangle g_{\gamma}(\tau_1 - \tau_1' = 0) \\ &= -\delta(\tau_1 - \tau_1')(2s + 1)V(0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}' n_{\mathbf{k}'}^{(0)} \end{aligned} \quad (1.45)$$

dove le lettere greche indicano lo stato della particella (*spin* e impulso). La quantità $g_{\gamma}(\tau_1 - \tau_1' = 0)$ è la funzione di Green termica del sistema non interagente, ovvero

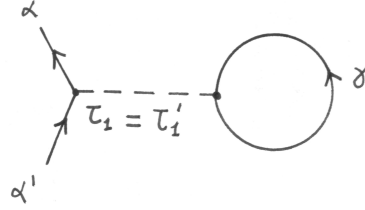


Figura 1.5: Diagramma di Feynman del contributo del termine diretto o di Hartree.

il propagatore libero. La (1.45) è il contributo del termine diretto (o di Hartree), a cui bisogna aggiungere il termine di scambio (o di Fock)

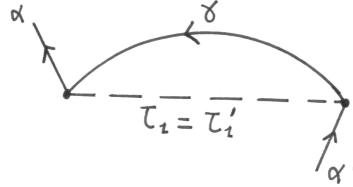


Figura 1.6: Diagramma di Feynman del contributo del termine di scambio o di Fock.

$$\begin{aligned}
 \Sigma_F^* &= -\delta(\tau_1 - \tau_1') \sum_{\gamma} \langle \alpha\gamma | \hat{V} | \alpha'\gamma \rangle g_{\gamma}(\tau_1 - \tau_1' = 0) \\
 &= \delta(\tau_1 - \tau_1') \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}' V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') n_{\mathbf{k}'}^{(0)}
 \end{aligned} \tag{1.46}$$

avendo posto in entrambe le formule $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\alpha} = \mathbf{k}_{\alpha'}$, $\mathbf{k}' = \mathbf{k}_{\gamma}$. Per quanto riguarda lo *spin* in questo caso si ha $\sigma_{\gamma} = \sigma_{\alpha} = \sigma_{\alpha'}$ e quindi non si ha la somma sugli *spin* della linea γ , manca così il fattore $(2s + 1)$.

Fermarsi ai diagrammi ora descritti non è soddisfacente in quanto Σ^* dipenderebbe soltanto da $n_{\mathbf{k}}^{(0)}$ che riguarda il sistema non interagente. Per cui si aggiungono tutte le infinite inserzioni di *self-energy* sulle linee γ . Ciò equivale a sostituire alla funzione di Green termica del sistema non interagente $g_{\gamma}(\tau_1 - \tau_1' = 0)$, la funzione di Green completa $\mathcal{G}(\mathbf{k}_{\gamma}, \tau_1 - \tau_1' = 0)$, di modo che la *self-energy* è data da [42]:

$$\begin{aligned}
 \Sigma^*(\mathbf{k}, \tau_1, \tau_1') &= \Sigma^*(\mathbf{k})\delta(\tau_1 - \tau_1') = (\Sigma_H^* + \Sigma_F^*)\delta(\tau_1 - \tau_1') = \\
 &= \delta(\tau_1 - \tau_1') \left[(2s + 1)V(0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}' n_{\mathbf{k}'} - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}' V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') n_{\mathbf{k}'} \right]
 \end{aligned}$$

L'energia di particella singola che tiene conto dell'interazione della particella di impulso \mathbf{k} col resto del sistema è data quindi da:

$$E_k = \epsilon_k^0 + \Sigma^*(k). \quad (1.47)$$

Nella rappresentazione delle frequenze si ha per la funzione di Green:

$$\mathcal{G}(\mathbf{k}, \omega_n) = -\frac{1}{i\omega_n - (E_k - \mu)} \quad (1.48)$$

in cui $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta\hbar}$ sono le frequenze di Matsubara [42]. La distribuzione di equilibrio per lo stato k è data da:

$$n_{\mathbf{k}} = -\mathcal{G}(\mathbf{k}, \tau - \tau' = 0_-) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \frac{e^{i\omega_n \eta}}{i\omega_n - (E_k - \mu)} = \frac{1}{e^{\beta(E_k - \mu)} + 1} \quad (1.49)$$

La procedura di autocompatibilità consiste nell'espressione di $n_{\mathbf{k}}$ in cui E_k determina, ed è allo stesso tempo determinata, da $n_{\mathbf{k}}$. Inoltre $n_{\mathbf{k}}$ e E_k dipendono da μ che è determinato fissando il numero di particelle del sistema:

$$N(T, \mathcal{V}, \mu) = (2s + 1) \sum_k n_k = (2s + 1) \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} n_{\mathbf{k}} \quad (1.50)$$

Se il sistema non fosse omogeneo si dovrebbero determinare in modo autocompatibile anche le autofunzioni di particella singola su cui si distribuiscono le particelle. Nel caso di un sistema omogeneo sono noti a priori, cioè sono delle onde piane.

Capitolo 2

Sviluppo semi-classico

Se la dimensione lineare delle variazioni del potenziale l_V sono molto grandi rispetto alla distanza su cui varia apprezzabilmente la funzione d'onda di singola particella λ ,

$$l_V \gg \lambda$$

allora le proprietà del sistema sono vicine a quelle classiche, e si può usare una approssimazione classica nello studio del sistema.

Per un sistema a molti corpi la generalizzazione di questa condizione viene naturalmente offerta dalle teorie di campo medio: in queste il potenziale efficace, che dà l'interazione di una particella con tutte le altre, dipende dalla densità ρ . Per cui quando si ha un insieme di N-particelle l'approssimazione classica ha senso fisico se la dimensione lineare su cui varia la densità l_ρ è molto maggiore rispetto alla dimensione in cui varia la funzione d'onda di singola particella. In questo caso è corretto parlare di approssimazione semi-classica, e non classica, in quanto si considera la statistica quantistica seguita dalle particelle. Inoltre lo *spin* viene sempre quantizzato. Nel caso particolare di un gas di fermioni la scala caratteristica su cui varia la funzione d'onda di singola particella è data dall'inverso dell'impulso di Fermi per \hbar . Per cui la condizione di validità dell'approssimazione semi-classica è:

$$l_\rho \gg \frac{\hbar}{p_F}.$$

Da notare che la condizione vale anche per un potenziale esterno eventualmente presente.

Nel caso dei gas atomici fermionici confinati, è stato mostrato che una approssimazione semi-classica diventa sempre più accurata se si considerano sistemi con un numero sempre più grande di costituenti [43]. In sostanza, a parità di numero di particelle costituenti il sistema, questo approccio risulta, rispetto ad altri metodi

come la RPA (*Random Phase Approximation*), più semplice e più trasparente da un punto di vista fisico.

In questa tesi si sottolinea la capacità di poter trattare da un punto di vista formale il comportamento all'equilibrio termodinamico e l'evoluzione dinamica del gas di fermioni tramite la stessa quantità: la trasformata di Wigner della densità [44]. In un certo senso è una rappresentazione nello “spazio delle fasi” della Meccanica Statistica Quantistica. In effetti nella Meccanica Quantistica non ha senso introdurre “distribuzioni nello spazio delle fasi”: a causa del principio di indeterminazione di Heisenberg, la posizione del sistema nello spazio delle fasi non è una quantità ben definita. Si può formalizzare la condizione di validità dell'approssimazione semi-classica. Sempre riferendosi a un gas, la distanza su cui varia la densità ρ rappresenta la scala caratteristica di delocalizzazione delle particelle. Essa è legata all'indeterminazione dell'impulso dal principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Perché la descrizione abbia senso Δp deve essere molto minore degli impulsi in gioco, i quali per un gas quasi-degenere sono dell'ordine di p_F , $\Delta p \ll p_F$. Dunque si ritrova

$$\Delta x \gg \frac{\hbar}{p_F}.$$

Questo capitolo è così strutturato: dopo aver accennato alla maniera semi classica per trattare un sistema di fermioni indipendenti § 2.1, e aver introdotto il formalismo che sta alla base del nostro studio § 2.2, si studiano le evoluzioni temporali delle trasformate di Wigner delle densità (§ 2.3, § 2.4, § 2.5), con le quali si ottengono le equazioni con cui descrivere il sistema § 2.6. Infine si ricorda la trattazione BCS del fenomeno della superfluidità dei fermioni § 2.7.

2.1 Fermioni indipendenti

In questa breve sezione si considera nuovamente il sistema di fermioni indipendenti, come esempio semplice di un possibile sviluppo semi-classico. La densità dei fermioni non interagenti è data da:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\nu} n_{\nu} |\phi_{\nu}(\mathbf{r})|^2, \quad (2.1)$$

dove n_{ν} è il numero di occupazione per lo stato ν , per il quale la funzione d'onda è $\phi_{\nu}(\mathbf{r})$. Nel caso in cui la lunghezza d'onda de Broglie associata a ciascuna particella è piccola rispetto alla scala in cui varia la densità e l'eventuale potenziale esterno,

è possibile descrivere il sistema, non più con la funzione d'onda bensì in termini della funzione di distribuzione semi-classica $f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$. Questa è definita in modo che $f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})d\mathbf{p}d\mathbf{r}/(2\pi\hbar)^3$ sia il numero medio di particelle nell'elemento di volume dello spazio delle fasi $d\mathbf{p}d\mathbf{r}$ di particella singola, e tiene conto della statistica quantistica seguita dalle particelle.

Il contenuto fisico di questa approssimazione si riconduce al fatto che il sistema possa avere localmente le stesse proprietà di un insieme infinito e omogeneo¹. La funzione di distribuzione all'equilibrio per i fermioni non interagenti è, per ogni stato di *spin*:

$$f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = f_{\mathbf{p}}^0(\mathbf{r}) = \frac{1}{e^{\beta[\varepsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) - \mu]} + 1}, \quad (2.2)$$

che è analoga alla (1.27). Qui l'energia per singola particella è quella di una particella classica:

$$\varepsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}), \quad (2.3)$$

Questa descrizione può essere utilizzata anche nel caso di particelle interagenti, per analizzare anche le eccitazioni del sistema. Il vincolo però è sempre quello che le variazioni spaziali delle grandezze in gioco avvengono su distanze grandi rispetto alle lunghezze d'onda delle eccitazioni tipiche.

2.2 Formalismo di base

Il sistema analizzato in questa mia tesi è un gas composto di atomi fermionici interagenti, indistinguibili, in stati di *spin* non definiti. In particolare il sistema viene considerato infinito, ovvero già nel limite termodinamico², omogeneo e isotropo. Inoltre analizzo il caso in cui sia a temperatura finita. Si richiede che il sistema sia all'equilibrio termodinamico, e che sia descrivibile mediante l'*ensemble* gran-canonic³. Non considero la presenza di interazioni esterne. Per cui si ha questa hamiltoniana grancanonica:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{V} = \sum_{\gamma} \int d\mathbf{x} \hat{\psi}_{\gamma}^{\dagger}(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) \hat{\psi}_{\gamma}(\mathbf{x}) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\gamma\beta, \gamma'\beta'} \iint d\mathbf{x} d\mathbf{z} \hat{\psi}_{\gamma}^{\dagger}(\mathbf{x}) \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{z}) \langle \gamma\beta | V(\mathbf{x}, \mathbf{z}) | \gamma'\beta' \rangle \hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{z}) \hat{\psi}_{\gamma'}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

¹In gergo abbia delle proprietà di *bulk*.

²Cioè in cui $N \rightarrow \infty$, $\mathcal{V} \rightarrow \infty$, mantenendo $N/\mathcal{V} = \rho = \text{cost}$.

³Con questo *ensemble* si considerano anche le fluttuazioni del numero di particelle.

dove $\hat{\psi}_\gamma(\mathbf{r})$ è l'operatore di campo fermionico e segue le regole di anticommutazione [42]:

$$\{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{z})\} = \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x})\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{z}) + \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{z})\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) = \delta_{\alpha,\beta}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \quad (2.5)$$

$$\{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{\psi}_\beta(\mathbf{z})\} = \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x})\hat{\psi}_\beta(\mathbf{z}) + \hat{\psi}_\beta(\mathbf{z})\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.6)$$

Nella (2.4) ho usato la seguente notazione per l'operatore a un corpo,

$$T(\mathbf{x}) \equiv -\frac{\hbar^2 \nabla_{\mathbf{x}}^2}{2m} - \mu, \quad (2.7)$$

μ è il potenziale chimico, mentre $\langle \gamma\beta | V(\mathbf{x}, \mathbf{z}) | \gamma'\beta' \rangle$ è l'elemento di matrice tra stati di *spin* delle particelle.

Si lavora in rappresentazione di Heisenberg:

$$\hat{\psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}, t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) e^{-i\hat{H}t/\hbar}. \quad (2.8)$$

Quindi i campi fermionici evolvono nel tempo secondo l'equazione,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}, t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} [\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{H}] e^{-i\hat{H}t/\hbar}. \quad (2.9)$$

dove \hat{H} è l'hamiltoniana grancanonica (2.4).

Per avere l'evoluzione dei campi fermionici $\hat{\psi}$ $\hat{\psi}^\dagger$ in maniera esplicita bisogna valutare i commutatori tra questi e l'hamiltoniana \hat{H} : per non appesantire la lettura ometto i passaggi intermedi. Questo è il risultato⁴ per il campo $\hat{\psi}$:

$$[\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{H}] = T(\mathbf{x})\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) + \sum_{\beta', \gamma', \gamma} \int d\mathbf{z} \hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{z}) \langle \gamma\alpha | V(\mathbf{x}, \mathbf{z}) | \gamma'\beta' \rangle \hat{\psi}_{\gamma'}(\mathbf{z}) \hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{x}). \quad (2.10)$$

Prendendone l'aggiunta si ottiene il risultato relativo al campo $\hat{\psi}^\dagger$:

$$[\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}), \hat{H}] = -\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x})T(\mathbf{x}) - \sum_{\beta, \beta', \gamma} \int d\mathbf{y} \hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{y}) \langle \gamma\beta | V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | \alpha\beta' \rangle \hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{y}). \quad (2.11)$$

Adesso che si ha l'evoluzione dei campi in maniera esplicita si può proseguire nello studio delle proprietà del sistema, con una tecnica particolare. Lo scopo infatti è di lavorare non direttamente con gli operatori, bensì con grandezze che possono avere un significato macroscopico, come per esempio la densità di particelle.

⁴Il calcolo completo si trova in appendice § A.1

2.3 La funzione di Wigner F

Il limite semi-classico di un certo osservabile può essere espresso dallo sviluppo in termini di \hbar , non tanto dell'osservabile stesso, ma bensì della sua così detta *trasformata di Wigner* [44], ed è conosciuta con il termine espansione in \hbar di *Wigner-Kirkwood* [45]. Questa tecnica è già stata usata nell'ambito dello studio della fase superfluida della materia nucleare [46, 47]. Si vedrà che in definitiva lo sviluppo semi-classico mediante la trasformata di Wigner, non è altro che una sviluppo in termini di potenze dei gradienti delle coordinate e degli impulsi.

Si definisce inizialmente la matrice⁵ densità normale, come un operatore non locale [43]:

$$\rho_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \langle : \hat{\psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{x}', t) \hat{\psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}, t) : \rangle, \quad (2.12)$$

dove le parentesi angolari hanno il significato di media sull'*ensemble*⁶.

Si prende la sua trasformata di Wigner, detta anche funzione di Wigner per la densità normale [48]:

$$F_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \langle : \hat{\psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{x}_-, t) \hat{\psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}_+, t) : \rangle, \quad (2.13)$$

dove $\mathbf{x}_+ \equiv \mathbf{x} + \mathbf{R}/2$, $\mathbf{x}_- \equiv \mathbf{x} - \mathbf{R}/2$. Questa grandezza è analoga alla funzione di distribuzione semi-classica (2.2) del caso di un sistema di fermioni liberi.

Si analizzano adesso le sue proprietà principali. Integrandola su tutti gli impulsi si ottiene la parte *locale* della matrice densità:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} F_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} (2\pi)^3 \int d\mathbf{R} \delta(\mathbf{R}/\hbar) \langle : \hat{\psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{x}_-, t) \hat{\psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}_+, t) : \rangle \\ &= \rho_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Se di questa espressione prendo la traccia sugli *spin*, ottengo⁷ la densità *locale* di particelle:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{\sigma} \langle : \hat{\psi}_{\sigma}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \rangle = \text{Tr} \hat{\rho}. \quad (2.15)$$

Nel limite di sistema omogeneo e isotropo all'equilibrio, la funzione di Wigner si riduce al numero medio di occupazione dello stato di impulso \mathbf{p} . Infatti, sviluppo il campo fermionico in seconda quantizzazione sulla base degli impulsi: il fatto di aver

⁵Nel caso di un sistema con *spin* 1/2 è una matrice 2×2 .

⁶Dato l'operatore \hat{O} , si ha $\langle : \hat{O} : \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}_G \hat{O}) = \frac{\text{Tr}(e^{-\beta(\hat{H}_c - \mu \hat{N})} \hat{O})}{\text{Tr} e^{-\beta(\hat{H}_c - \mu \hat{N})}}$.

⁷D'ora in avanti per non appesantire ulteriormente la veste grafica del testo, i campi in rappresentazione di Heisenberg saranno indicati con $\hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{x}, t)$.

preso un sistema omogeneo e uniforme implica che l'impulso si conserva per cui è conveniente usare lo sviluppo in onde piane degli operatori di campo:

$$\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} a_{\alpha\mathbf{k}} \quad \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}'} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} a_{\alpha\mathbf{k}}^\dagger, \quad (2.16)$$

dove $a_{\alpha\mathbf{k}}^\dagger$ e $a_{\alpha\mathbf{k}}$ sono gli operatori di creazione e di distruzione di una particella nello stato α e impulso $\hbar\mathbf{k} = \mathbf{q}$, cfr. [48].

$$\begin{aligned} F_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-, t) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+, t) : \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{V}} \int d\mathbf{R} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} e^{-i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{x}_-)} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_+)} \langle : a_{\beta\mathbf{k}'}^\dagger a_{\alpha\mathbf{k}} : \rangle. \end{aligned}$$

Nell'ipotesi di un sistema omogeneo: $\langle : a_{\beta\mathbf{k}'}^\dagger a_{\alpha\mathbf{k}} : \rangle = \delta_{\beta,\alpha} \delta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}} \langle : a_{\alpha\mathbf{k}}^\dagger a_{\alpha\mathbf{k}} : \rangle$

$$= \frac{1}{\mathcal{V}} \int d\mathbf{R} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_-)} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_+)} \langle : a_{\alpha\mathbf{k}}^\dagger a_{\alpha\mathbf{k}} : \rangle.$$

Nel limite continuo posso sostituire alle sommatorie gli integrali:

$$\sum_{\mathbf{k}} \longrightarrow \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} = \frac{\mathcal{V}}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{q}. \quad (2.17)$$

Per cui viene:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{\mathcal{V}}{(2\pi\hbar)^3} \iint d\mathbf{R} d\mathbf{q} e^{-i\frac{\mathbf{R}}{\hbar} \cdot (\mathbf{p}-\mathbf{q})} \langle : a_{\alpha\mathbf{q}}^\dagger a_{\alpha\mathbf{q}} : \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{q} (2\pi)^3 \delta\left(\frac{\mathbf{p}-\mathbf{q}}{\hbar}\right) \langle : a_{\alpha\mathbf{q}}^\dagger a_{\alpha\mathbf{q}} : \rangle \\ &= \langle : a_{\alpha\mathbf{p}}^\dagger a_{\alpha\mathbf{p}} : \rangle. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Lo scopo di questo capitolo è di arrivare a scrivere un sistema di equazioni con cui si riesce a descrivere, in linea di principio, il comportamento all'equilibrio termodinamico e fuori equilibrio del gas di fermioni per qualunque valore dell'interazione efficace. Nel caso all'equilibrio termodinamico il sistema di equazioni porta direttamente all'equazione per il *gap*, mentre fuori dall'equilibrio si ottengono i modi collettivi del gas. Questo sistema di equazioni deriva direttamente dall'analisi della evoluzione temporale della funzione di Wigner.

2.3.1 Evoluzione della funzione F

Il primo passo è studiare le proprietà del sistema attraverso l'evoluzione della funzione di Wigner. Ovvero si valuta la sua derivata rispetto al tempo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = i\hbar \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \left[\left\langle : \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-, t) \right) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+, t) : \right\rangle \right]$$

$$+ \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-, t) \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+, t) : \rangle. \quad (2.19)$$

A questo punto si usano gli utili risultati per l'evoluzione dei campi fermionici (2.10) (2.11): svolgendo i calcoli compariranno termini a un corpo e termini a due corpi.

Termini a un corpo

Adesso analizzo la parte “a un corpo”, indicata con $F^{(1)}$, della variazione della funzione di Wigner:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F_{\alpha,\beta}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \left[- \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-, t) T(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+, t) : \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-, t) T(\mathbf{x}_+) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+, t) : \rangle \right] \\ &= \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \left[- \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-, t) \left(-\frac{\hbar^2 \overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{x}}^2}{2m} - \mu \right) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+, t) : \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-, t) \left(-\frac{\hbar^2 \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{x}}^2}{2m} - \mu \right) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+, t) : \rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Usando l'identità:

$$\overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{x}}^2 - \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{x}}^2 = (\overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{x}}) \cdot (\overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{x}}) = \overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{x}}^2 + \overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{x}} \cdot \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{x}} \cdot \overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{x}}^2, \quad (2.21)$$

la (2.20) diventa:

$$= \int d\mathbf{R} \frac{\hbar^2}{2m} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-, t) (\overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{x}}) \cdot (\overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{x}}) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+, t) : \rangle. \quad (2.22)$$

La (2.22) si può riscrivere in termini di gradienti delle variabili \mathbf{R} ed \mathbf{x} :

$$\langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-, t) (\overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{x}}) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+, t) : \rangle = -2\nabla_{\mathbf{R}} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-, t) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+, t) : \rangle \quad (2.23)$$

$$\langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-, t) (\overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{x}}) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+, t) : \rangle = \nabla_{\mathbf{x}} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-, t) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+, t) : \rangle. \quad (2.24)$$

Utilizzando questo risultato si può scrivere la derivata temporale della funzione di Wigner come una *convoluzione* di operatori differenziali:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F_{\alpha,\beta}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= \frac{i\hbar}{m} \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} (i\hbar \nabla_{\mathbf{R}}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-, t) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+, t) : \rangle \\ &= -i\hbar \frac{\mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}}{m} F_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Termini a due corpi

Proseguo analizzando la parte “a due corpi”, indicata con $F^{(2)}$, della variazione della funzione di Wigner:

$$\int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \left(- \sum_{\gamma,\sigma,\sigma'} \langle : \int d\mathbf{y} \hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{y}) \langle \gamma\sigma | V(\mathbf{x}_-, \mathbf{y}) | \beta\sigma' \rangle \hat{\psi}_{\sigma'}(\mathbf{y}) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+) : \rangle \right)$$

$$+ \sum_{\tau', \lambda', \lambda} \int d\mathbf{z} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\lambda^\dagger(\mathbf{z}) \langle \lambda\alpha | V(\mathbf{x}_+, \mathbf{z}) | \lambda'\tau' \rangle \hat{\psi}_{\lambda'}(\mathbf{z}) \hat{\psi}_{\tau'}(\mathbf{x}_+) : \rangle. \quad (2.26)$$

A questo punto conviene specializzare lo studio scegliendo un potenziale di contatto, ovvero a *range* d'interazione nullo e non dipendente dagli *spin*. Questa è una scelta consueta per gas diluiti a bassa temperatura [43, 49, 50, 51]. Si deve dire che semplifica i calcoli, ma comporta un problema di rinormalizzazione di alcune risultanti⁸:

$$\begin{aligned} \langle \gamma\sigma | V(\mathbf{x}_-, \mathbf{y}) | \beta\sigma' \rangle &= g\delta_{\sigma,\sigma'}\delta_{\gamma,\beta}\delta(\mathbf{x}_- - \mathbf{y}) \\ \langle \lambda\alpha | V(\mathbf{x}_+, \mathbf{z}) | \lambda'\tau' \rangle &= g\delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{\alpha,\tau'}\delta(\mathbf{x}_+ - \mathbf{z}). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Con questa scelta l'equazione (2.26) diventa:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F_{\alpha,\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= g \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \left(- \sum_{\sigma} \langle : \int d\mathbf{y} \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{y}) \delta(\mathbf{x}_- - \mathbf{y}) \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{y}) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+) : \rangle \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\lambda} \int d\mathbf{z} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\lambda^\dagger(\mathbf{z}) \delta(\mathbf{x}_+ - \mathbf{z}) \hat{\psi}_\lambda(\mathbf{z}) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+) : \rangle \right) \\ &= g \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \left(- \sum_{\sigma} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+) : \rangle \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\sigma} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\lambda^\dagger(\mathbf{x}_+) \hat{\psi}_\lambda(\mathbf{x}_+) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+) : \rangle \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Come si vede per entrambi gli addendi si ha la media di quattro operatori di campo. A questo punto si opera un'ulteriore approssimazione, quella di campo medio; utilizzando il teorema di Wick si ottiene:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F_{\alpha,\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = g \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} (-A + B), \quad (2.29)$$

in cui:

$$A = \sum_{\sigma} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+) : \rangle \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} &\simeq \sum_{\sigma} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+) : \rangle \langle : \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{x}_-) : \rangle \\ &\quad - \sum_{\sigma} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{x}_-) : \rangle \langle : \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+) : \rangle \\ &\quad + \sum_{\sigma} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{x}_-) : \rangle \langle : \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+) : \rangle, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$B = \sum_{\sigma} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\lambda^\dagger(\mathbf{x}_+) \hat{\psi}_\lambda(\mathbf{x}_+) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+) : \rangle \quad (2.32)$$

⁸La discussione completa relativa ai problemi di convergenza data questa scelta viene ripresa nel paragrafo § 3.3.

$$\begin{aligned}
 &\simeq \sum_{\sigma} \langle : \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{x}_{-}) \hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{x}_{+}) : \rangle \langle : \hat{\psi}_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{x}_{+}) \hat{\psi}_{\lambda}(\mathbf{x}_{+}) : \rangle \\
 &\quad - \sum_{\sigma} \langle : \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{x}_{-}) \hat{\psi}_{\lambda}(\mathbf{x}_{+}) : \rangle \langle : \hat{\psi}_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{x}_{+}) \hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{x}_{+}) : \rangle \\
 &\quad + \sum_{\sigma} \langle : \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{x}_{-}) \hat{\psi}_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{x}_{+}) : \rangle \langle : \hat{\psi}_{\lambda}(\mathbf{x}_{+}) \hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{x}_{+}) : \rangle. \tag{2.33}
 \end{aligned}$$

Tra i vari addendi riconosco la matrice densità normale locale (2.14), e incontro la matrice densità *anomala* locale, o altresì detta *campo di pairing*⁹:

$$\kappa_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t) = \langle : \hat{\psi}_{\beta}(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{x}, t) : \rangle. \tag{2.34}$$

$$\bar{\kappa}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t) = \langle : \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x}, t) : \rangle. \tag{2.35}$$

In termini di queste densità la (2.28) diventa:

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F_{\alpha,\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = g \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \left\{ \langle : \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{x}_{-}) \hat{\psi}_{\lambda}(\mathbf{x}_{+}) : \rangle (\rho(\mathbf{x}_{+}, t) - \rho(\mathbf{x}_{-}, t)) \right. \\
 \quad + \sum_{\sigma} \langle : \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x}_{-}) \hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{x}_{+}) : \rangle \rho_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}_{-}, t) \\
 \quad - \sum_{\lambda} \langle : \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{x}_{-}) \hat{\psi}_{\lambda}(\mathbf{x}_{+}) : \rangle \rho_{\alpha,\lambda}(\mathbf{x}_{+}, t) \\
 \quad + \sum_{\lambda} \langle : \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{x}_{-}) \hat{\psi}_{\lambda}(\mathbf{x}_{+}) : \rangle \kappa_{\alpha,\lambda}(\mathbf{x}_{+}, t) \\
 \quad \left. - \sum_{\sigma} \langle : \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x}_{-}) \hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{x}_{+}) : \rangle \bar{\kappa}_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}_{-}, t) \right\}. \tag{2.36}
 \end{aligned}$$

Osservo che questa espressione è composta di tre gruppi di due addendi ciascuno. Nel primo gruppo c'è una dipendenza dalla densità locale, termine *diretto*. Il secondo gruppo dipende dalla matrice densità, termine *di scambio*. Il terzo gruppo dipende dalla matrice densità anomala, termine *anomalo*¹⁰.

Adesso quello che faremo sarà mettere in evidenza nella (2.36) la funzione di Wigner. Per questo faremo per ciascun termine uno sviluppo di Taylor delle densità attorno alla variabile \mathbf{x} . Ci si fermerà al primo ordine. Ricordo che è uno sviluppo semi-classico: questa procedura d'approssimazione vale per variazioni spaziali *lente* delle grandezze in gioco.

Sviluppando fino al primo ordine in \mathbf{R} la densità:

$$\rho_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}_{+}, t) \simeq \rho_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{R}}{2} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}, t). \tag{2.37}$$

$$\rho_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}_{-}, t) \simeq \rho_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}, t) - \frac{\mathbf{R}}{2} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}, t). \tag{2.38}$$

⁹In generale è un campo complesso.

¹⁰Questi termini gergali sono propri dell'approssimazione campo medio detta di Hartree-Fock, vedi par. § 1.5.

Si ottiene per il termine diretto:

$$\begin{aligned}
 & g \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+) : \rangle (\rho(\mathbf{x}_+, t) - \rho(\mathbf{x}_-, t)) \\
 &= g \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+) : \rangle (\mathbf{R} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}, t)) \\
 &= +i\hbar g \nabla_{\mathbf{p}} F_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}, t).
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

e per il termine di scambio:

$$\begin{aligned}
 & g \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \left\{ \sum_{\sigma} \langle : \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+) : \rangle \rho_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}_-, t) - \sum_{\lambda} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\lambda(\mathbf{x}_+) : \rangle \rho_{\alpha,\lambda}(\mathbf{x}_+, t) \right\} \\
 &= g \sum_{\sigma} F_{\alpha,\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \rho_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}, t) - \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\sigma} \nabla_{\mathbf{p}} F_{\alpha,\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}, t) \\
 &\quad - g \sum_{\lambda} F_{\lambda,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \rho_{\alpha,\lambda}(\mathbf{x}, t) - \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\lambda} \nabla_{\mathbf{p}} F_{\lambda,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho_{\alpha,\lambda}(\mathbf{x}, t).
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Operando analogamente sulla densità anomala:

$$\kappa_{\alpha,\lambda}(\mathbf{x}_+, t) \simeq \kappa_{\alpha,\lambda}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{R}}{2} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \kappa_{\alpha,\lambda}(\mathbf{x}, t). \tag{2.41}$$

$$\bar{\kappa}_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}_-, t) \simeq \bar{\kappa}_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}, t) - \frac{\mathbf{R}}{2} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \bar{\kappa}_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}, t). \tag{2.42}$$

Si ottengono i termini di ordine zero dello sviluppo in gradiente,

$$\begin{aligned}
 & g \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \left\{ \sum_{\lambda} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\lambda(\mathbf{x}_+) : \rangle \kappa_{\alpha,\lambda}(\mathbf{x}, t) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{\sigma} \langle : \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+) : \rangle \bar{\kappa}_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}, t) \right\},
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

definisco le trasformate di Wigner delle densità anomale:

$$D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \langle : \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}_-, t) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}_+, t) : \rangle \tag{2.44}$$

$$\bar{D}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-, t) \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}_+, t) : \rangle. \tag{2.45}$$

La (2.43) è il prodotto di convoluzione dei campi κ e $\bar{\kappa}$, e delle loro trasformate di Wigner, rispettivamente D e \bar{D} , vedi par. § 2.4. I termini del primo ordine sono del tipo:

$$g \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-) \hat{\psi}_\lambda^\dagger(\mathbf{x}_+) : \rangle \frac{\mathbf{R}}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \kappa_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}, t) = \frac{i\hbar g}{2} \nabla_{\mathbf{p}} \bar{D}_{\beta,\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}, t).$$

Per cui si ha:

$$\begin{aligned}
 & g \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \left\{ \sum_{\lambda} \langle : \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{x}_{-}) \hat{\psi}_{\lambda}(\mathbf{x}_{+}) : \rangle \kappa_{\alpha,\lambda}(\mathbf{x}_{+}, t) - \sum_{\sigma} \langle : \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x}_{-}) \hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{x}_{+}) : \rangle \bar{\kappa}_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}_{-}, t) \right\} \\
 &= g \sum_{\lambda} \bar{D}_{\lambda,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \kappa_{\alpha,\lambda}(\mathbf{x}, t) + \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\lambda} \nabla_{\mathbf{p}} \bar{D}_{\lambda,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \kappa_{\alpha,\lambda}(\mathbf{x}, t) \\
 &\quad - g \sum_{\sigma} D_{\alpha,\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \bar{\kappa}_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}, t) + \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\sigma} \nabla_{\mathbf{p}} D_{\alpha,\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \bar{\kappa}_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}, t). \tag{2.46}
 \end{aligned}$$

Unendo i risultati (2.25), (2.39), (2.40), (2.46) si ha alla fine:

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F_{\alpha,\beta}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F_{\alpha,\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\
 &= -i\hbar \frac{\mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}}{m} F_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + i\hbar g \nabla_{\mathbf{p}} F_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}, t) \\
 &\quad + g \sum_{\sigma} F_{\alpha,\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \rho_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}, t) - \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\sigma} \nabla_{\mathbf{p}} F_{\alpha,\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}, t) \\
 &\quad - g \sum_{\lambda} F_{\lambda,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \rho_{\alpha,\lambda}(\mathbf{x}, t) - \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\lambda} \nabla_{\mathbf{p}} F_{\lambda,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho_{\alpha,\lambda}(\mathbf{x}, t) \\
 &\quad + g \sum_{\lambda} \bar{D}_{\lambda,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \kappa_{\alpha,\lambda}(\mathbf{x}, t) + \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\lambda} \nabla_{\mathbf{p}} \bar{D}_{\lambda,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \kappa_{\alpha,\lambda}(\mathbf{x}, t) \\
 &\quad - g \sum_{\sigma} D_{\alpha,\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \bar{\kappa}_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}, t) + \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\sigma} \nabla_{\mathbf{p}} D_{\alpha,\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \bar{\kappa}_{\sigma,\beta}(\mathbf{x}, t). \tag{2.47}
 \end{aligned}$$

2.4 Le funzioni di Wigner *anomale*, D \bar{D}

Nell'equazione d'evoluzione della funzione di Wigner F entrano in gioco le funzioni di Wigner della densità anomala e della sua complessa coniugata:

$$D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \langle : \hat{\psi}_{\beta}(\mathbf{x}_{-}, t) \hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{x}_{+}, t) : \rangle. \tag{2.48}$$

$$\bar{D}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \langle : \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{x}_{-}, t) \hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x}_{+}, t) : \rangle. \tag{2.49}$$

Da notare che per loro valgono le proprietà, analoghe alla (2.14):

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \kappa_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t). \tag{2.50}$$

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \bar{D}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \bar{\kappa}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t). \tag{2.51}$$

Esaminiamo il caso di un sistema omogeneo e isotropo all'equilibrio termodinamico anche per la D e la \bar{D} . Al solito sviluppo il campo fermionico sulla base degli impulsi:

$$\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} a_{\alpha\mathbf{k}}. \quad (2.52)$$

Con questa scelta la D diventa:

$$D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{\mathcal{V}} \int d\mathbf{R} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_-)} e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{x}_+)} \langle : a_{\beta\mathbf{k}} a_{\alpha\mathbf{k}'} : \rangle.$$

Per l'ipotesi di sistema omogeneo c'è la conservazione dell'impulso: si formano così solo coppie di Cooper con impulso totale nullo

$$= \frac{1}{\mathcal{V}} \int d\mathbf{R} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_-)} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_+)} \langle : a_{-\alpha\mathbf{k}} a_{\alpha-\mathbf{k}} : \rangle.$$

Passando al limite continuo per la somma su \mathbf{k} si ottiene:

$$D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \langle : a_{-\alpha-\mathbf{p}} a_{\alpha\mathbf{p}} : \rangle. \quad (2.53)$$

Per la funzione \bar{D} con un procedimento analogo si ottiene:

$$\bar{D}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \langle : a_{\beta\mathbf{p}}^\dagger a_{-\beta-\mathbf{p}}^\dagger : \rangle. \quad (2.54)$$

L'equazione (2.47) per l'evoluzione temporale della funzione di Wigner F contiene le funzioni di Wigner anomale, per cui è necessario introdurre l'equazioni per quest'ultime.

2.4.1 Evoluzione della funzione \bar{D}

Procediamo in analogia al paragrafo precedente: si studia l'evoluzione della funzione \bar{D} . Ovvero si valuta la sua derivata rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{D}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= i\hbar \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \left[\langle : \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-, t) \right) \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}_+, t) : \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-, t) \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}_+, t) : \rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Si ottengono termini a un corpo e termini a due corpi.

Termini a un corpo

La parte "a un corpo" della variazione della \bar{D} è data da:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{D}_{\alpha,\beta}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \left[\langle : \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-, t) \frac{\hbar^2}{2m} (\overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{x}}^2 + \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{x}}^2) \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}_+, t) : \rangle \right]$$

$$+2\mu\langle:\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-,t)\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}_+,t):\rangle]. \quad (2.56)$$

Sfruttando l'identità¹¹:

$$\overleftarrow{\nabla}_x^2 + \overrightarrow{\nabla}_x^2 = \frac{1}{2}[(\overleftarrow{\nabla}_x + \overrightarrow{\nabla}_x)^2 + (\overleftarrow{\nabla}_x - \overrightarrow{\nabla}_x)^2], \quad (2.57)$$

con l'aiuto delle identità (2.23), (2.24) si ottiene:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\bar{D}_{\alpha,\beta}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{\hbar^2\nabla_x^2}{4m}\bar{D}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + 2\mu\bar{D}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - \frac{\mathbf{p}^2}{m}\bar{D}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t). \quad (2.58)$$

in cui si è usato il fatto:

$$\int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}/\hbar}\left(\frac{-\hbar^2\nabla_{\mathbf{R}}^2}{2m}\right)\langle:\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-,t)\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}_+,t):\rangle = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\bar{D}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t). \quad (2.59)$$

Termini a due corpi

A questo punto si prosegue analizzando la parte “a due corpi” della variazione temporale della \bar{D} . Anche in questo caso la procedura è simile al caso della funzione di Wigner normale. All'evoluzione temporale di D contribuiscono tre termini: diretto, di scambio, anomalo. Nel primo compare il prodotto di convoluzione della la funzione di Wigner \bar{D} con la densità.

$$g \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}/\hbar}\langle:\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-)\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}_+):\rangle(-\rho(\mathbf{x}_-,t) - \rho(\mathbf{x}_+,t))$$

Nel secondo la \bar{D} è accoppiata con la matrice densità.

$$g \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}/\hbar}\left\{\sum_\nu\langle:\hat{\psi}_\nu^\dagger(\mathbf{x}_-)\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}_+):\rangle\rho_{\nu,\beta}(\mathbf{x}_-,t) + \sum_\rho\langle:\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-)\hat{\psi}_\rho^\dagger(\mathbf{x}_+):\rangle\rho_{\rho,\alpha}(\mathbf{x}_+,t)\right\}$$

La novità si ha nel termine anomalo:

$$g \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}/\hbar}\left\{-\sum_\rho\langle:\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_-)\hat{\psi}_\rho(\mathbf{x}_+):\rangle\bar{\kappa}_{\rho,\alpha}(\mathbf{x}_+,t)\right\}$$

¹¹Non è difficile dimostrare questa identità, infatti:

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\nabla}_x &= \frac{1}{2}(\overleftarrow{\nabla}_x + \overrightarrow{\nabla}_x - \overrightarrow{\nabla}_x + \overleftarrow{\nabla}_x) = \frac{1}{2}[(\overleftarrow{\nabla}_x + \overrightarrow{\nabla}_x) + (\overleftarrow{\nabla}_x - \overrightarrow{\nabla}_x)] \\ \overrightarrow{\nabla}_x &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{\nabla}_x + \overleftarrow{\nabla}_x - \overleftarrow{\nabla}_x + \overrightarrow{\nabla}_x) = \frac{1}{2}[(\overleftarrow{\nabla}_x + \overrightarrow{\nabla}_x) - (\overleftarrow{\nabla}_x - \overrightarrow{\nabla}_x)] \\ \overleftarrow{\nabla}_x^2 &= \frac{1}{4}[(\overleftarrow{\nabla}_x + \overrightarrow{\nabla}_x)^2 + (\overleftarrow{\nabla}_x - \overrightarrow{\nabla}_x)^2 + 2(\overleftarrow{\nabla}_x + \overrightarrow{\nabla}_x) \cdot (\overleftarrow{\nabla}_x - \overrightarrow{\nabla}_x)] \\ \overrightarrow{\nabla}_x^2 &= \frac{1}{4}[(\overleftarrow{\nabla}_x + \overrightarrow{\nabla}_x)^2 + (\overleftarrow{\nabla}_x - \overrightarrow{\nabla}_x)^2 - 2(\overleftarrow{\nabla}_x + \overrightarrow{\nabla}_x) \cdot (\overleftarrow{\nabla}_x - \overrightarrow{\nabla}_x)]. \end{aligned}$$

$$- \sum_{\nu} \langle : \hat{\psi}_{\nu}(\mathbf{x}_{-}) \hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x}_{+}) : \rangle \bar{\kappa}_{\nu, \beta}(\mathbf{x}_{-}, t) \Big\}.$$

Definisco la trasformata di Wigner \bar{F} :

$$\bar{F}_{\alpha, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \langle : \hat{\psi}_{\beta}(\mathbf{x}_{-}, t) \hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x}_{+}, t) : \rangle \quad (2.60)$$

Il termine anomalo, una volta sviluppato all'ordine zero dello, porta la convoluzione della matrice densità anomala con la trasformata di Wigner \bar{F} .

Fermandosi al primo ordine dello sviluppo in gradienti si ottiene alle:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{D}_{\alpha, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{D}_{\alpha, \beta}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{D}_{\alpha, \beta}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\ &= \frac{\hbar^2 \nabla_{\mathbf{x}}^2}{4m} \bar{D}_{\alpha, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + 2\mu \bar{D}_{\alpha, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\ &\quad - \frac{\mathbf{p}^2}{m} \bar{D}_{\alpha, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - 2g \bar{D}_{\alpha, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \rho(\mathbf{x}, t) \\ &\quad + g \sum_{\nu} \bar{D}_{\alpha, \nu}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \rho_{\nu, \beta}(\mathbf{x}, t) - \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\nu} \nabla_{\mathbf{p}} \bar{D}_{\alpha, \nu}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \nabla_{\mathbf{x}} \rho_{\nu, \beta}(\mathbf{x}, t) \\ &\quad + g \sum_{\rho} \bar{D}_{\rho, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \rho_{\rho, \alpha}(\mathbf{x}, t) + \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\rho} \nabla_{\mathbf{p}} \bar{D}_{\rho, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \nabla_{\mathbf{x}} \rho_{\rho, \alpha}(\mathbf{x}, t) \\ &\quad - g \sum_{\nu} \bar{F}_{\alpha, \nu}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \bar{\kappa}_{\nu, \beta}(\mathbf{x}, t) + \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\nu} \nabla_{\mathbf{p}} \bar{F}_{\alpha, \nu}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \nabla_{\mathbf{x}} \bar{\kappa}_{\nu, \beta}(\mathbf{x}, t) \\ &\quad - g \sum_{\rho} F_{\rho, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \bar{\kappa}_{\rho, \alpha}(\mathbf{x}, t) - \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\rho} \nabla_{\mathbf{p}} F_{\rho, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \nabla_{\mathbf{x}} \bar{\kappa}_{\rho, \alpha}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.61)$$

2.4.2 Evoluzione della funzione D

L'equazione per l'evoluzione temporale della funzione D , è simile alla precedente.

Per brevità riporto solamente il risultato.

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} D_{\alpha, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= -\frac{\hbar^2 \nabla_{\mathbf{x}}^2}{4m} D_{\alpha, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - 2\mu D_{\alpha, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\ &\quad + \frac{\mathbf{p}^2}{m} D_{\alpha, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + 2g D_{\alpha, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \rho(\mathbf{x}, t) \\ &\quad - g \sum_{\mu} D_{\alpha, \mu}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \rho_{\beta, \mu}(\mathbf{x}, t) + \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\mu} \nabla_{\mathbf{p}} D_{\alpha, \mu}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho_{\beta, \mu}(\mathbf{x}, t) \\ &\quad - g \sum_{\sigma} D_{\sigma, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \rho_{\alpha, \sigma}(\mathbf{x}, t) - \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\sigma} \nabla_{\mathbf{p}} D_{\sigma, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho_{\alpha, \sigma}(\mathbf{x}, t) \\ &\quad + g \sum_{\sigma} \bar{F}_{\sigma, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \kappa_{\alpha, \sigma}(\mathbf{x}, t) + \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\sigma} \nabla_{\mathbf{p}} \bar{F}_{\sigma, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \kappa_{\alpha, \sigma}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$+g \sum_{\mu} F_{\alpha,\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \kappa_{\beta,\mu}(\mathbf{x}, t) - \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\mu} \nabla_{\mathbf{p}} F_{\alpha,\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \kappa_{\beta,\mu}(\mathbf{x}, t).$$

Adesso per completare il *set* di quattro equazioni per le quattro funzioni di Wigner, bisogna introdurre l'equazione per l'evoluzione della funzione \bar{F} .

2.5 La funzione di Wigner \bar{F}

Se la funzione di Wigner normale F si può associare alla funzione di distribuzione delle particelle, è naturale aspettarsi una funzione di distribuzione delle buche di particella (o lacune). Si può notare infatti che per la funzione di Wigner \bar{F} definita nel paragrafo precedente vale:

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \bar{F}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \langle : \hat{\psi}_{\beta}(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x}, t) : \rangle = \delta_{\alpha,\beta} - \rho_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t). \quad (2.63)$$

Questo fatto è ancora più chiaro quando si valuta la \bar{F} per un sistema omogeneo e isotropo all'equilibrio termodinamico.

$$\bar{F}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{\mathcal{V}} \int d\mathbf{R} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-)} e^{-i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{x}+)} \langle : a_{\beta\mathbf{k}} a_{\alpha\mathbf{k}'}^{\dagger} : \rangle.$$

Usando in ordine l'ipotesi di sistema omogeneo, il limite continuo e la definizione della delta di Dirac, si ottiene:

$$\bar{F}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \langle : a_{\alpha-\mathbf{p}} a_{\alpha-\mathbf{p}}^{\dagger} : \rangle = 1 - \langle : a_{\alpha-\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\alpha-\mathbf{p}} : \rangle.$$

Questa equazione dà il numero di occupazione delle buche di particella nello stato di impulso $-\mathbf{p}$.

2.5.1 Evoluzione della funzione \bar{F}

L'equazione per l'evoluzione della funzione di Wigner \bar{F} è molto simile all'equazione (2.47) per F . Siccome non ci sono novità riporto solo il risultato finale.

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{F}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= i\hbar \frac{\mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}}{m} \bar{F}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - i\hbar g \nabla_{\mathbf{p}} \bar{F}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}, t) \\ &\quad - g \sum_{\gamma} \bar{F}_{\alpha,\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \rho_{\beta,\gamma}(\mathbf{x}, t) + \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\gamma} \nabla_{\mathbf{p}} \bar{F}_{\alpha,\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho_{\beta,\gamma}(\mathbf{x}, t) \\ &\quad + g \sum_{\nu} \bar{F}_{\nu,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \rho_{\nu,\alpha}(\mathbf{x}, t) + \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\nu} \nabla_{\mathbf{p}} \bar{F}_{\nu,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho_{\nu,\alpha}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned}
& -g \sum_{\nu} D_{\nu,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \bar{\kappa}_{\nu,\alpha}(\mathbf{x}, t) - \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\nu} \nabla_{\mathbf{p}} D_{\nu,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \bar{\kappa}_{\nu,\alpha}(\mathbf{x}, t) \\
& +g \sum_{\gamma} \bar{D}_{\alpha,\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \kappa_{\beta,\gamma}(\mathbf{x}, t) - \frac{i\hbar g}{2} \sum_{\gamma} \nabla_{\mathbf{p}} \bar{D}_{\alpha,\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \kappa_{\beta,\gamma}(\mathbf{x}, t).
\end{aligned}$$

2.6 Riepilogo

In conclusione ho trovato che analizzando l'evoluzione temporale della funzione di Wigner della densità, fermandosi alla variazione prima dei campi fermionici, e usando delle approssimazioni ragionevoli, sono emerse delle equazioni integro differenziali accoppiate, e dunque compongono un sistema formato dalle (2.47), (2.62), (2.61), (2.64).

Infatti dall'evoluzione della F deriva la necessità di analizzare l'evoluzione temporale delle trasformate di Wigner di densità anomale; le cui evoluzioni dipendono a loro volta dalla trasformata di Wigner della densità delle particelle e dalla densità di lacune: si “chiude” così il sistema di equazioni accoppiate.

È da sottolineare il fatto che il formalismo usato è molto generale e può valere per molte configurazioni del gas di fermioni: per esempio si possono analizzare fenomeni collettivi legati allo *spin* (tipo onde di *spin*), oppure considerare fermioni con più di due stati di *spin* diversamente popolati. Come già detto precedentemente abbiamo fatto la scelta particolare di un potenziale di contatto indipendente dallo *spin*, ma formalmente si può includere un potenziale a *range* finito anche dipendente dallo *spin*; oppure considerare il caso di un sistema di fermioni confinati da un potenziale esterno. In questa tesi si analizza il caso di un sistema di fermioni con due stati di *spin* (\uparrow, \downarrow) equamente popolati: si considereranno dunque solo fenomeni legati alla fluttuazione di densità.

Nel prossimo capitolo partiremo da questo punto si scriverà il sistema di equazioni accoppiate in forma matriciale compatta, poi, nel caso particolare di un sistema omogeneo e isotropo all'equilibrio termodinamico, si ricaverà in maniera diretta l'equazione del *gap*.

Nella prossima sezione ricordo i risultati principali della trattazione usuale del problema della superconduttività.

2.7 Trattazione usuale BCS

La teoria BCS è stata formulata nel 1957 dai fisici Bardeen, Cooper e Schrieffer che la introdussero per spiegare i fenomeni della superconduttività dei metalli a

temperature vicino allo zero assoluto [15]. Cooper fu il primo a mostrare che una interazione attrattiva tra fermioni nel mare di Fermi conduce all'apparizione di una coppia di particelle fortemente correlate [16]. A temperatura zero lo stato fondamentale del sistema non interagente (il mare di Fermi totalmente riempito), quando viene accesa l'interazione, diventa instabile verso la formazione di coppie, e l'energia finita del legame della coppia fornisce una spiegazione qualitativa per il *gap* nello spettro di eccitazione.

In questa sezione riporto i passaggi significativi della trattazione della BCS con le funzioni di Green termiche. Infatti, a $T = 0$ la trattazione classica di Bogoliubov mediante una trasformazione canonica [52] determina il corretto stato fondamentale, la trattazione può essere estesa anche a temperatura finita, ma Gorkov ha mostrato che è preferibile riformulare la teoria in termini di funzioni di Green termiche [53].

La teoria considera l'hamiltoniana grancanonica $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ (2.4). In questa il potenziale attrattivo tra particelle \hat{V} viene approssimato con una funzione delta (2.27) in cui la costante d'accoppiamento g viene presa positiva:

$$\hat{V} = -g \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) \quad (2.65)$$

Ponendosi in approssimazione di campo medio, in analogia con quanto visto sopra, si fattorizza la media sull'*ensemble* di equilibrio dei quattro operatori di campo fermionico applicando il teorema di Wick, includendo la possibilità che due fermioni di *spin* opposti possano formare una coppia di Cooper:

$$\hat{V} \approx \hat{V}_{HF} - g \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \left[\langle \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}) \rangle \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) + \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}) \langle \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) \rangle \right] \quad (2.66)$$

in cui \hat{V}_{HF} rappresenta il contributo di Hartree-Fock § 1.5. Si può vedere che con questa scelta le equazioni di moto per $\hat{\psi}$ e $\hat{\psi}^\dagger$ sono accoppiate: la teoria non conserva più il numero di particelle: così le coppie di Cooper condensate possono essere considerate come un bagno di particelle, in analogia stretta con il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein [42].

Sebbene si possano mantenere tutti i termini in (2.66), è più semplice omettere \hat{V}_{HF} trattando lo stato normale come uno gas di fermioni non interagenti § 1.4. Questa approssimazione si basa sull'assunzione che \hat{V}_{HF} sia lo stesso sia nella fase normale che in quella superconduttiva, e non influisca sul confronto tra i due stati.

In questa teoria oltre alla funzione di Green normale \mathcal{G} :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}\tau, \mathbf{x}'\tau') \equiv -\langle T_\tau [\hat{\psi}_{H\uparrow}(\mathbf{x}, \tau) \hat{\psi}_{H\uparrow}^\dagger(\mathbf{x}', \tau')] \rangle \quad (2.67)$$

si deve considerare la funzione di Green anomala \mathcal{F} che è diversa da zero quando è presente un *gap* finito:

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}\tau, \mathbf{x}'\tau') \equiv -\langle T_\tau[\hat{\psi}_{H\uparrow}(\mathbf{x}, \tau)\hat{\psi}_{H\downarrow}(\mathbf{x}', \tau')] \rangle \quad (2.68)$$

in entrambe le definizioni le parentesi angolari rappresentano la media di *ensemble* valutata con l'hamiltoniana efficace, e il simbolo T_τ ordina gli operatori secondo il valore di τ , mettendo i più piccoli a destra.

In molti casi di interesse, l'hamiltoniana efficace ottenuta è indipendente dal tempo: le funzioni di Green dipendono solo dalla differenza di tempi, ed è utile passare alla rappresentazione delle frequenze [42]. Quindi nel caso di un mezzo omogeneo e isotropo le equazioni per le funzioni di Green \mathcal{G} e \mathcal{F}^\dagger sono:

$$\left(i\hbar\omega_n + \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + \mu\right)\mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \omega_n) + \Delta\mathcal{F}^\dagger(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \omega_n) = \hbar\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.69)$$

$$\left(-i\hbar\omega_n + \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + \mu\right)\mathcal{F}^\dagger(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \omega_n) + \Delta^*\mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \omega_n) = 0 \quad (2.70)$$

$$\Delta^* = \frac{g}{\beta\hbar} \sum_n e^{-i\omega_n\eta} \mathcal{F}^\dagger(\mathbf{x} = 0, \omega_n) \quad (2.71)$$

passando alle grandezze trasformate di Fourier, si ottengono due equazioni algebriche accoppiate:

$$(i\hbar\omega_n - \xi_k)\mathcal{G}(\mathbf{k}, \omega_n) + \Delta\mathcal{F}^\dagger(\mathbf{k}, \omega_n) = \hbar \quad (2.72)$$

$$(-i\hbar\omega_n - \xi_k)\mathcal{F}^\dagger(\mathbf{k}, \omega_n) + \Delta^*\mathcal{G}(\mathbf{k}, \omega_n) = 0 \quad (2.73)$$

in cui $\xi_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu$ rappresenta l'energia cinetica misurata dal potenziale chimico. In assenza di campo esterno il parametro Δ si può essere preso reale senza perdere generalità, per cui $\mathcal{F}^\dagger(\mathbf{k}, \omega_n) = \mathcal{F}(\mathbf{k}, \omega_n)$. La soluzione del sistema accoppiato si può scrivere nella forma:

$$\mathcal{G}(\mathbf{k}, \omega_n) = \frac{u_k^2}{i\hbar\omega_n - E_k} + \frac{v_k^2}{i\hbar\omega_n + E_k} \quad (2.74)$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}, \omega_n) = -u_k v_k \left[\frac{1}{i\hbar\omega_n - E_k} - \frac{1}{i\hbar\omega_n + E_k} \right] \quad (2.75)$$

in cui

$$E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2} \quad (2.76)$$

$$u_k v_k = \frac{\Delta}{2E_k} \quad (2.77)$$

$$v_k^2 = 1 - u_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{E_k} \right) \quad (2.78)$$

Nel caso del mezzo uniforme l'equazione autocompatibile (2.71) per Δ diventa:

$$\Delta = \frac{g}{\beta \hbar} \sum_n \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\hbar \Delta}{(\hbar \omega_n)^2 + E_k^2}, \quad (2.79)$$

La serie può essere sommata direttamente [42], cancellando il fattore comune Δ si trova:

$$1 = g \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \tanh\left(\frac{1}{2}\beta E_k\right) \quad (2.80)$$

che fornisce la dipendenza del *gap* in funzione della temperatura. Una approssimazione accettabile nel caso dei metalli si ha valutando l'integrale sul picco vicino alla superficie di Fermi¹²

$$1 = g \frac{mk_F}{2\pi^2 \hbar^2} \int_0^{\hbar \omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{2k_B T}\right) \quad (2.81)$$

e viene valutato fino all'energia di Debye $\hbar \omega_D \ll \varepsilon_F$, che rappresenta un *cut off* naturale per la superconduttività nei metalli.

¹²Ciò equivale a un cambio di variabili

$$(2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k} \dots \approx N(0) \int d\xi \dots$$

dove $N(0)$ rappresenta la densità di stati sulla superficie di Fermi.

Capitolo 3

Gas all'equilibrio termodinamico: *crossover* BCS-BEC

La possibilità di poter controllare l'interazione efficace tra gli atomi presenti in un gas degenerato di fermioni, apre interessanti scenari sia da un punto di vista sperimentale che teorico. Infatti non c'è solo la possibilità di confermare a livello sperimentale le predizioni teoriche di un comportamento quantistico osservato in un diverso ambito della fisica (la superconduttività nei metalli): si apre la possibilità di studiare in dettaglio lo stato superfluido dei fermioni e la sua relazione con lo stato superfluido dei bosoni (condensazione di Bose-Einstein).

Come si è visto nel paragrafo § 1.4 basta una piccola interazione efficace attrattiva per rendere instabile il mare di Fermi nello stato normale, portare alla formazione di coppie di Cooper e quindi dello stato superfluido. Adesso però a differenza del fenomeno osservato in stato solido, si può studiare come cambia il *gap* facendo aumentare in valore assoluto l'interazione. A questo proposito abbiamo visto nel paragrafo § 1.3 che ciò è diventato possibile grazie alle risonanze di Fano-Feshbach, per cui agendo su un campo magnetico esterno si riesce a variare la lunghezza di *scattering* in onda-S. Abbiamo visto (cfr. § 1.2) che nel caso di gas diluiti alle basse temperature questa grandezza ha il ruolo di potenziale efficace. Alla risonanza esatta $|a_s|$ ha una divergenza: questo regime è detto unitario ed è peculiare poiché il gas è allo stesso tempo diluito, nel senso che il *range* del potenziale interatomico è più piccolo della distanza fra le particelle, e fortemente interagente, nel senso che la lunghezza di *scattering* è più grande della distanza media interatomica. Tutte le scale di lunghezza associate con l'interazione scompaiono dal problema e ci si aspetta un comportamento universale del sistema indipendente dai dettagli del potenziale interatomico, ma solo dalla distanza media tra atomi, lunghezza che è direttamente

legata al momento di Fermi k_F . Oltre questo limite sempre grazie alle risonanze di Feshbach la lunghezza di *scattering* cambia di segno: in questo regime le coppie di fermioni con *spin* opposto possono formare delle molecole che sono a tutti gli effetti dei bosoni. In sostanza il *crossover* BCS-BEC è proprio la connessione continua tra questi tre regimi. A questo punto è bene osservare che per una strana combinazione della natura sia i fisici sperimentali che i fisici teorici possono studiare con una certa facilità quel che accade in regimi di interazione piuttosto forti, ovvero attorno al limite unitario, rispetto ai regimi di interazione deboli in cui il comportamento limite del gas è già noto.

A livello teorico sono due i parametri esterni con cui posso controllare lo stato del sistema: uno è l'ampiezza di *scattering* in onda-S a_s , l'altro è la sua temperatura T . Trattando un sistema già al limite termodinamico le grandezze caratterizzanti a livello macroscopico sono la densità di particelle ρ e il potenziale chimico μ , mentre a livello microscopico sono la massa m e lo *spin* dei fermioni.

In questo capitolo riesco a quantificare il *crossover* nel caso particolare di un sistema omogeneo e isotropo di fermioni con *spin* $1/2$ all'equilibrio termodinamico. Il punto di partenza è il sistema di quattro equazioni integro differenziali accoppiate in quattro incognite: F, \bar{F}, D, \bar{D} : in queste condizioni si arriva in modo naturale all'equazione che esprime il *gap* di energia, in funzione delle grandezze che caratterizzano il sistema. La teoria si propone di creare un ponte fra la superconduttività e la superfluidità, fenomeni profondamente simili, ma tradizionalmente associati rispettivamente ai fermioni e ai bosoni. Da notare che trattando atomi neutri è più appropriato dire superfluidità dei fermioni, ma molto spesso i due termini vengono usati come sinonimi. In questo studio mi propongo di analizzare il passaggio dal regime BCS al regime BEC per un sistema di fermioni a temperatura diversa da zero. Questa transizione avviene con continuità in maniera liscia attraverso una "fase" intermedia: per questo si parla di *crossover*. In ciascun regime il sistema si descrive attraverso lo stesso parametro d'ordine: il *gap* Δ . Nei due casi estremi il Δ acquista [54] un diverso significato fisico per:

- **Stato BCS:** due fermioni correlati a distanze grandi rispetto alla distanza media interatomica, 2Δ rappresenta l'energia per rompere una coppia di Cooper.
- **Stato BEC:** due fermioni si legano in un bosone molecolari (*composite boson*), Δ è legata alla funzione d'onda bosonica.

L'approssimazione di campo medio, specialmente nel limite BCS è più che sufficiente

a dare l'andamento delle quantità in gioco. È da sottolineare il fatto nel limite BEC sono emerse delle discrepanze rispetto ai calcoli fatti a temperatura zero con metodi di *Quantum Monte Carlo* [55].

In questo capitolo, dopo aver portato le equazioni accoppiate in forma compatta § 3.1, si analizza il caso di un sistema di fermioni con *spin* 1/2 all'equilibrio termodinamico. Nel paragrafo § 3.3 si dà una procedura di normalizzazione delle grandezze legata al fatto che stiamo usando uno pseudopotenziale. Nel paragrafo § 3.4 si illustrano i risultati numerici ottenuti. Infine si analizza il primo modo collettivo: il suono isotermico § 3.5.

3.1 Forma matriciale compatta

In questa sezione faccio vedere che posso mettere le equazioni integro differenziali accoppiate trovate nel capitolo precedente in forma matriciale compatta.

Si può mostrare, vedi § A.2 per i dettagli, che le funzioni di Wigner soddisfano alcune simmetrie nelle variabili di *spin*. Queste sono riassunte dalle seguenti proprietà generali¹, utili nel seguito.

$$F_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = F_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (3.1)$$

$$\overline{F}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \delta_{\alpha,\beta} - F_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t) \quad (3.2)$$

$$D^*_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \overline{D}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (3.3)$$

$$D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = D_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t), \quad (3.4)$$

dove $*$ è l'operazione di coniugazione complessa. Inoltre si trova che per le matrici densità locali, valgono proprietà analoghe, ricavabili direttamente dalla definizione:

$$\rho_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t) = 1 - \rho^*_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t) \quad (3.5)$$

$$\kappa_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t) = -\kappa_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t) \quad (3.6)$$

$$\overline{\kappa}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t) = -\overline{\kappa}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t) \quad (3.7)$$

$$\kappa^*_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t) = \overline{\kappa}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t). \quad (3.8)$$

Come già osservato le matrici densità anomale e le relative funzioni di Wigner sono in generale delle funzioni complesse. Dalla relazione (3.8) e dalla (3.3) si ricavano le relazioni per le parti reali e immaginarie:

$$\Re D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \Re \overline{D}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (3.9)$$

¹Si stanno considerando per l'ultima volta variabili di *spin* (α, β) generiche.

$$\Im D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = -\Im \bar{D}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (3.10)$$

$$\Re \kappa_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t) = \Re \bar{\kappa}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t) \quad (3.11)$$

$$\Im \kappa_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t) = -\Im \bar{\kappa}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t). \quad (3.12)$$

Siccome nelle equazioni accoppiate trovate compaiono i prodotti tra le matrici densità e le funzioni di Wigner, conviene utilizzare queste due proprietà importanti:

$$\Re \left[\bar{D}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \kappa_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t) \right] = \Re \left[D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \bar{\kappa}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t) \right] \quad (3.13)$$

$$\Im \left[\bar{D}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \kappa_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t) \right] = -\Im \left[D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \bar{\kappa}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t) \right]. \quad (3.14)$$

Passiamo al caso di un sistema di fermioni con due stati di *spin* (\uparrow, \downarrow) equamente popolati: in virtù delle proprietà di simmetria appena ricordate, conviene fissare la dipendenza dalle variabili di *spin* in modo che non sussistono ambiguità. Per questo si usa una notazione compatta delle grandezze e delle funzioni di Wigner:

$$\rho \equiv \rho_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{x}, t) \quad \bar{\rho} \equiv 1 - \rho_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{x}, t) \quad (3.15)$$

$$\kappa \equiv \kappa_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{x}, t) \quad \bar{\kappa} \equiv \bar{\kappa}_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{x}, t) \quad (3.16)$$

$$F \equiv F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad \bar{F} \equiv \bar{F}_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (3.17)$$

$$D \equiv D_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad \bar{D} \equiv \bar{D}_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t). \quad (3.18)$$

Definisco il *gap* di energia come:

$$\Delta \equiv \Delta(\mathbf{x}, t) = -g\kappa_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{x}, t) \quad (3.19)$$

$$\Delta^* \equiv \Delta^*(\mathbf{x}, t) = -g\bar{\kappa}_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{x}, t). \quad (3.20)$$

In più definisco la grandezza ξ :

$$\xi \equiv -\frac{\hbar^2 \nabla_{\mathbf{x}}^2}{2m} + \frac{g}{2} \rho(\mathbf{x}, t) - \mu \quad (3.21)$$

in cui compare l'interazione di campo medio del tipo Hartree-Fock.

Si definisce una matrice \mathcal{R} che contiene le matrici densità:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \rho & -\kappa \\ -\bar{\kappa} & \bar{\rho} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

E una matrice \mathcal{H} , che in un certo senso generalizza l'hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \xi & \Delta \\ \Delta^* & -\xi \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Il sistema evolve secondo l'equazione compatta [43]:

$$i\hbar \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = [\mathcal{H}, \mathcal{R}] = \mathcal{H}\mathcal{R} - \mathcal{R}\mathcal{H}. \quad (3.24)$$

Facendo il prodotto tra le matrici si ottiene il *set* di equazioni:

$$\begin{cases} i\hbar \partial_t \rho = \xi \rho - \Delta \bar{\kappa} - \rho \xi + \kappa \Delta^* \\ -i\hbar \partial_t \kappa = -\xi \kappa + \Delta \bar{\rho} - \rho \Delta - \kappa \xi \\ -i\hbar \partial_t \bar{\kappa} = \Delta^* \rho + \xi \bar{\kappa} + \bar{\kappa} \xi - \bar{\rho} \Delta^* \\ i\hbar \partial_t \bar{\rho} = -\Delta^* \kappa - \xi \bar{\rho} + \bar{\kappa} \Delta + \bar{\rho} \xi \end{cases}. \quad (3.25)$$

Ricordo che non posso mettere in relazione la matrice \mathcal{R} con le distribuzioni semi-classiche, ma la sua trasformata di Wigner.

Si passa alle trasformate di Wigner: al primo ordine in \hbar vale la seguente relazione per la trasformazione del prodotto [48]:

$$\{AB\}_W \cong A_W B_W + \frac{i\hbar}{2} \{A_W, B_W\}, \quad (3.26)$$

la W a pedice indica che si sta considerando trasformata di Wigner della grandezza, definita in analogia con la relazione (2.13). Per cui si ha:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial F}{\partial t} &= \xi F + \frac{i\hbar}{2} \{\xi, F\} - \Delta \bar{D} - \frac{i\hbar}{2} \{\Delta, \bar{D}\} - F \xi - \frac{i\hbar}{2} \{F, \xi\} + D \Delta^* + \frac{i\hbar}{2} \{D, \Delta^*\} \\ -i\hbar \frac{\partial D}{\partial t} &= -\xi D - \frac{i\hbar}{2} \{\xi, D\} + \Delta \bar{F} + \frac{i\hbar}{2} \{\Delta, \bar{F}\} - F \Delta - \frac{i\hbar}{2} \{F, \Delta\} - D \xi - \frac{i\hbar}{2} \{D, \xi\} \\ -i\hbar \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} &= \Delta^* F + \frac{i\hbar}{2} \{\Delta^*, F\} + \xi \bar{D} + \frac{i\hbar}{2} \{\xi, \bar{D}\} + \bar{D} \xi + \frac{i\hbar}{2} \{\bar{D}, \xi\} - \bar{F} \Delta^* - \frac{i\hbar}{2} \{\bar{F}, \Delta^*\} \\ i\hbar \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} &= -\Delta^* D - \frac{i\hbar}{2} \{\Delta^*, D\} - \xi \bar{F} - \frac{i\hbar}{2} \{\xi, \bar{F}\} + \bar{D} \Delta + \frac{i\hbar}{2} \{\bar{D}, \Delta\} + \bar{F} \xi + \frac{i\hbar}{2} \{\bar{F}, \xi\}. \end{aligned}$$

A questo punto si usano le proprietà (3.13), (3.14), così posso calcolare:

$$\begin{aligned} \{\Delta, \bar{D}\} - \{D, \Delta^*\} &= \{\Delta, \bar{D}\} + \{\Delta^*, D\} = \\ &= \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{D}}{\partial p_i} - \frac{\partial \Delta}{\partial p_i} \frac{\partial \bar{D}}{\partial x_i} + \frac{\partial \Delta^*}{\partial x_i} \frac{\partial D}{\partial p_i} - \frac{\partial \Delta^*}{\partial p_i} \frac{\partial D}{\partial x_i} = 2\Re \left[\{\Delta^*, D\} \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Dopo pochi passaggi algebrici si arriva al *set* di equazioni:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F = i\hbar \{\xi, F\} + 2i\Im \left[D \Delta^* \right] - i\hbar \Re \left[\{\Delta^*, D\} \right] \quad (3.28a)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{F} = -i\hbar \{\xi, \bar{F}\} - 2i\Im \left[D \Delta^* \right] - i\hbar \Re \left[\{\Delta^*, D\} \right] \quad (3.28b)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} D = 2\xi D - i\frac{\hbar}{2} \{\Delta, F + \bar{F}\} - \Delta (F - \bar{F}) \quad (3.28c)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{D} = -2\xi \bar{D} - i\frac{\hbar}{2} \{\Delta^*, F + \bar{F}\} - \Delta^* (F - \bar{F}). \quad (3.28d)$$

Riesprimendo le grandezze in forma estesa e usando la proprietà (3.2) per la trasformata di Wigner \bar{F} si ottengono le quattro equazioni accoppiate [43]:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= i\hbar \{\xi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\} \\ &\quad + 2i\Im \left[D_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \Delta^*(\mathbf{x}, t) \right] \\ &\quad - i\hbar \Re \left[\{ \Delta^*(\mathbf{x}, t), D_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \} \right] \end{aligned} \quad (3.29a)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t) &= -i\hbar \{\xi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), F_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t)\} \\ &\quad + 2i\Im \left[D_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \Delta^*(\mathbf{x}, t) \right] \\ &\quad + i\hbar \Re \left[\{ \Delta^*(\mathbf{x}, t), D_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \} \right] \end{aligned} \quad (3.29b)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} D_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= 2\xi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) D_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\ &\quad - i\frac{\hbar}{2} \{ \Delta(\mathbf{x}, t), F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - F_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t) \} \\ &\quad + \Delta(\mathbf{x}, t) [F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + F_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t) - 1] \end{aligned} \quad (3.29c)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{D}_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= -2\xi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \bar{D}_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\ &\quad - i\frac{\hbar}{2} \{ \Delta^*(\mathbf{x}, t), F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - F_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t) \} \\ &\quad - \Delta^*(\mathbf{x}, t) [F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + F_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t) - 1]. \end{aligned} \quad (3.29d)$$

dove $\xi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu + \frac{g}{2}\rho(\mathbf{x})$ che sono equivalenti al nostro risultato trovato².

3.2 Ipotesi semplificative

In questa sezione passo al calcolo vero e proprio, analizzando un sistema di fermioni interagenti omogeneo e isotropo, all'equilibrio termodinamico con i due stati di *spin* equamente popolati. In queste condizioni si possono considerare le grandezze non dipendenti dalla posizione e dal tempo. Tutti i termini nelle quattro equazioni in cui compaiono i gradienti rispetto allo spazio e derivate temporali sono nulli.

$$\rho_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{x}, t) \equiv \rho_{\uparrow\uparrow} \quad \rho(\mathbf{x}, t) \equiv \rho \quad (3.30a)$$

$$\kappa_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{x}, t) \equiv \kappa_{\downarrow\uparrow} \quad \bar{\kappa}_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{x}, t) \equiv \bar{\kappa}_{\downarrow\uparrow} \quad (3.30b)$$

²Si può verificare partendo dalle equazioni trovate fermandosi ai termini in \hbar , usando la definizione del *gap* e le proprietà trovate all'inizio di questo capitolo, (3.1) e seguenti.

$$F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \equiv F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}) \quad \bar{F}_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \equiv \bar{F}_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{p}) \quad (3.30c)$$

$$D_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \equiv D_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{p}) \quad \bar{D}_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \equiv \bar{D}_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{p}). \quad (3.30d)$$

Le due equazioni per le trasformate di Wigner normali si semplificano in:

$$0 = gF_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p})\rho_{\uparrow\uparrow} - gF_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p})\rho_{\uparrow\uparrow} + g\bar{D}_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{p})\kappa_{\uparrow\downarrow} - gD_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{p})\bar{\kappa}_{\downarrow\uparrow} \quad (3.31a)$$

$$0 = g\bar{F}_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{p})\rho_{\downarrow\downarrow} - g\bar{F}_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{p})\rho_{\downarrow\downarrow} - gD_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{p})\bar{\kappa}_{\uparrow\downarrow} + g\bar{D}_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{p})\kappa_{\downarrow\uparrow}. \quad (3.31b)$$

Entrambe portano alla medesima relazione³:

$$\bar{D}_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{p})\kappa_{\uparrow\downarrow} = D_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{p})\bar{\kappa}_{\downarrow\uparrow}. \quad (3.32)$$

Da notare che una volta integrata in \mathbf{p} questa equazione è una semplice identità. Dunque grazie all'equazione (3.32) si può dire che all'equilibrio se $\kappa_{\uparrow\downarrow} \neq 0$, allora c'è una relazione che lega le due funzioni di Wigner anomale D e \bar{D} :

$$\bar{D}_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{p}) = D_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{p}) \frac{\bar{\kappa}_{\downarrow\uparrow}}{\kappa_{\uparrow\downarrow}}. \quad (3.33)$$

Passo ad analizzare le due equazioni (3.29c), (3.29d). Per un sistema omogeneo all'equilibrio termodinamico risulta:

$$-\left[2\mu - \frac{\mathbf{p}^2}{m} - g\rho\right]D_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{p}) = -g\left[1 - F_{\downarrow\downarrow}(-\mathbf{p}) - F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p})\right]\kappa_{\uparrow\downarrow} \quad (3.34a)$$

$$\left[2\mu - \frac{\mathbf{p}^2}{m} - g\rho\right]\bar{D}_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{p}) = g\left[1 - F_{\downarrow\downarrow}(-\mathbf{p}) - F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p})\right]\bar{\kappa}_{\downarrow\uparrow}. \quad (3.34b)$$

Si osservi che per la (3.32) sono equivalenti.

In questo caso il *gap* di energia (3.19) diventa:

$$\Delta = -g\kappa_{\uparrow\downarrow} = g\kappa_{\downarrow\uparrow} \quad \Delta^* = -g\bar{\kappa}_{\downarrow\uparrow} = g\bar{\kappa}_{\uparrow\downarrow}, \quad (3.35)$$

Mentre la la grandezza ξ si può riscrivere come:

$$\xi = \varepsilon_p - \mu^* = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{g}{2}\rho - \mu, \quad (3.36)$$

in cui si è definita la quantità $\mu^* = \mu - \frac{g}{2}\rho$, che acquista il significato di *potenziale chimico efficace*. Infatti nel caso non interagente, ovvero in cui $g = 0$, μ^* si riduce al potenziale chimico. Infine $\varepsilon_p = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ è l'energia cinetica di particella.

³Si osservi che nel caso generale fuori dall'equilibrio termodinamico questo risultato è anche la parte reale dell'equazione (3.29a) per $\partial_t F$.

Adesso uso una delle ipotesi semplificative che ho posto all'inizio del paragrafo. L'ipotesi di isotropia implica che la funzione di Wigner all'equilibrio termodinamico non dipende dalla direzione dell'impulso \mathbf{p} , ma solo dal suo modulo. Per cui si ha:

$$F_{\downarrow\downarrow}(-\mathbf{p}) = F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}). \quad (3.37)$$

Dunque l'equazione (3.34a) per D diventa:

$$2\xi D_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{p}) = \Delta \left[1 - 2F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}) \right] \quad (3.38)$$

$$D_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{p}) = \frac{\Delta}{2\xi} \left[1 - 2F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}) \right] \quad (3.39)$$

Integrando sugli impulsi, si usa la (2.50) unita alla definizione del *gap* (3.19):

$$\Delta = -g \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\Delta}{2\xi} \left[1 - 2F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}) \right]. \quad (3.40)$$

Analogamente l'equazione (3.34b) per \bar{D} diventa:

$$\bar{D}_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{p}) = \frac{\Delta^*}{2\xi} \left[1 - 2F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}) \right] \quad (3.41)$$

$$\Delta^* = -g \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\Delta^*}{2\xi} \left[1 - 2F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}) \right], \quad (3.42)$$

è la complessa coniugata della (3.40) essendo la funzione di Wigner e ξ parametri reali.

Il passo successivo è stabilire l'espressione per la funzione di Wigner, ovvero bisogna determinare le sue dipendenze dai parametri del problema, cioè il potenziale chimico efficace μ^* , la costante di accoppiamento g , la temperatura T . È possibile ottenere questo analizzando in questo caso la forma matriciale compatta delle equazioni [43].

Si torni alla matrice⁴ \mathcal{R}_W , che contiene tutte le funzioni di Wigner incontrate. Adesso prende la forma:

$$\mathcal{R}_W = \begin{pmatrix} F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}) & -D_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{p}) \\ -\bar{D}_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{p}) & \bar{F}_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Seguendo il principio di corrispondenza [48], ogni stato eccitato del sistema di fermioni interagenti si può esprimere come *quasiparticelle*⁵. Queste si descrivono con la funzione di distribuzione di fermioni non interagenti. Tradotto nel caso in esame

⁴Il motivo della W a pedice deriva dal fatto che è trasformata di Wigner.

⁵Consideriamo la matrice (3.23): attraverso la matrice \mathcal{H} si può formalizzare il concetto di

il sistema di fermioni non interagenti si descrive con una matrice diagonale, i cui elementi sono, appunto, le distribuzioni di fermioni non interagenti.

$$\mathcal{R}_W^{(d)} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{W11}^{(d)} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{W22}^{(d)} \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

In cui gli elementi di matrice sono:

$$\mathcal{R}_{W11}^{(d)} = \frac{1}{e^{\beta E} + 1} \quad (3.48)$$

$$\mathcal{R}_{W22}^{(d)} = \frac{e^{\beta E}}{e^{\beta E} + 1}, \quad (3.49)$$

dove $E^2 = \xi^2 + \Delta^2$ è la relazione di dispersione delle *quasiparticelle*. Si noti che con queste funzioni segue la proprietà per $\mathcal{R}_W^{(d)}$ di avere la traccia uguale a uno.

$$\mathcal{R}_W^{(d)} = \mathcal{R}_{W11}^{(d)} + \mathcal{R}_{W22}^{(d)} = 1. \quad (3.50)$$

Con questa caratteristica si può trovare la trasformazione per diagonalizzare \mathcal{R}_W , in modo da poter esprimere le funzioni di Wigner in termini delle grandezze caratteristiche. Infatti se vale la corrispondenza

$$\text{Tr}\mathcal{R}_W = \text{Tr}\mathcal{R}_W^{(d)} \quad (3.51)$$

$$\det\mathcal{R}_W = \det\mathcal{R}_W^{(d)} \quad (3.52)$$

L'equazione per la traccia in questo caso è solo un'identità:

$$\text{Tr}\mathcal{R}_W = F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}) + \bar{F}_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{p}) \quad (3.53)$$

$$= F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}) + 1 - F_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{p}) \quad (3.54)$$

$$= 1. \quad (3.55)$$

L'espressione del determinante invece dà una informazione non banale:

$$\det\mathcal{R}_W = F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p})\bar{F}_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{p}) - D_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{p})\bar{D}_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{p}) \quad (3.56)$$

corrispondenza con un sistema formato da *quasiparticelle*: nella sua forma diagonale compare la relazione di dispersione E ,

$$\mathcal{H}^{(d)} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

La corrispondenza è in un certo senso garantita dal fatto che per entrambe le matrici \mathcal{H} , che in linea di principio possono non essere legate tra loro, valgono le stesse proprietà:

$$\text{Tr}\mathcal{H} = 0 = \text{Tr}\mathcal{H}^{(d)} \quad (3.45)$$

$$\det\mathcal{H} = -\xi^2 - \Delta^2 = -E^2 = \det\mathcal{H}^{(d)}. \quad (3.46)$$

$$= \mathcal{R}_{W11}^{(d)} \mathcal{R}_{W22}^{(d)}. \quad (3.57)$$

Usando le relazioni (3.37), (3.39) e (3.41), l'equazione precedente diventa di secondo grado in F :

$$4E^2 F_{\uparrow\uparrow}^2(\mathbf{p}) - 4E^2 F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}) + \Delta^2 + 4\xi^2 \mathcal{R}_{W11}^{(d)} \mathcal{R}_{W22}^{(d)} = 0.$$

Quindi si trova la dipendenza di F dalle funzioni di distribuzione delle *quasiparticelle*:

$$F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\xi}{E} \sqrt{1 - 4\mathcal{R}_{W11}^{(d)} \mathcal{R}_{W22}^{(d)}} \right). \quad (3.58)$$

Siccome,

$$1 - 4\mathcal{R}_{W11}^{(d)} \mathcal{R}_{W22}^{(d)} = 1 - \frac{4e^{\beta E}}{(e^{\beta E} + 1)^2} = \tanh^2(\beta E/2). \quad (3.59)$$

Per la funzione di Wigner ottengo:

$$F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\xi}{E} \tanh(\beta E/2) \right], \quad (3.60)$$

che coincide con il risultato che si ottiene dalla trattazione usuale della teoria BCS a temperatura finita [42]. Grazie a questa espressione si possono calcolare la densità locale e il *gap*, che stiamo supponendo reale, in funzione dei parametri fisici del sistema.

Equazione della densità:

$$\rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha,\alpha} = 2 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} F_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}) \quad (3.61)$$

$$\rho = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \left[1 - \frac{\xi}{E} \tanh(\beta E/2) \right]. \quad (3.62)$$

Equazione del *gap*:

$$\Delta = -g \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\Delta}{2\xi} \left\{ 1 - 2 \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\xi}{E} \tanh(\beta E/2) \right] \right\} \quad (3.63)$$

$$1 = -g \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2E} \tanh(\beta E/2). \quad (3.64)$$

3.3 Procedura di normalizzazione

Osserviamo che l'integrale sugli impulsi nell'equazione del *gap* (3.64), trovata nella sezione precedente, non è convergente. Questa conseguenza deriva da due fatti. Il

primo è di ordine fisico: non c'è un *cut-off* naturale⁶ che permetta di “evitare” l'integrazione su tutti gli impulsi. Il secondo fatto è di natura tecnica: deriva dalla scelta di un potenziale di contatto (2.27), ovvero a zero *range* d'interazione. Si può procedere seguendo la procedura di regolarizzazione della costante di accoppiamento g , cfr. [56].

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{\tilde{g}} - \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}} \quad (3.65)$$

dove $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ è l'energia per particella libera. La (3.64) diventa così:

$$\frac{1}{\tilde{g}} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}} - \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2E} \tanh(\beta E/2). \quad (3.66)$$

Adesso scrivo la costante normalizzata \tilde{g} in termini dell'ampiezza di *scattering* in onda-S:

$$\tilde{g} = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}. \quad (3.67)$$

Osserviamo che se si esprime \tilde{g} in termini della lunghezza di *scattering* la (3.65) è l'equazione per lo pseudopotenziale: infatti come sottolineato in § 1.2 i contributi ad alto \mathbf{k} sono implicitamente considerati scrivendo al posto del vero potenziale la dipendenza esplicita da a_s . La ricetta di normalizzazione data da (3.65) non è altro che togliere in maniera esplicita i contributi aggiunti in maniera implicita. C'è da sottolineare un fatto importante: nella formazione delle coppie di Cooper contribuiscono anche stati intermedi virtuali di particella libera [42], ovvero al di sopra della superficie di Fermi: questi stati sono implicitamente considerati in a_s . L'equazione del *gap* diventa pertanto [50]:

$$\frac{m}{4\pi\hbar^2 a_s} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \left[\frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}} - \frac{1}{2E} \tanh(\beta E/2) \right]. \quad (3.68)$$

Che accoppiata con l'equazione per la densità (3.62) fornisce i valori del *gap* di energia Δ e il potenziale chimico μ , fissati le grandezze che determinano lo “stato” del sistema, ovvero la lunghezza di *scattering* a_s , la temperatura T , e la densità di particelle ρ .

3.4 Procedura numerica

Abbiamo da risolvere un sistema non lineare di due equazioni (3.62), (3.68) in due incognite reali che sono il Δ e il potenziale chimico μ . Il metodo usato non può che

⁶Come la frequenza di Debye nel caso della superconduttività degli elettroni nello stato solido, vedi § 2.7 e [42].

essere di tipo numerico: per l'occasione ho costruito un algoritmo tipo *line-search* con il metodo di Newton [57], nel linguaggio di programmazione FORTRAN 77 [58]. A questo punto conviene operare lo *scaling*: si scrivono le grandezze secondo le scale caratteristiche del sistema. Il vettore d'onda k rispetto al vettore di Fermi è:

$$k = \bar{k}k_F, \quad (3.69)$$

in cui ho definito la grandezza adimensionale \bar{k} . Analogamente definisco le altre variabili secondo la scala dell'energia di Fermi:

$$\bar{\mu}^* = \frac{\mu^*}{\varepsilon_F} \quad \bar{\Delta} = \frac{\Delta}{\varepsilon_F} \quad \bar{T} = \frac{k_B T}{\varepsilon_F}. \quad (3.70)$$

Anche la lunghezza di *scattering* la posso scrivere in scala di k_F^{-1} :

$$\bar{a} = a_s k_F. \quad (3.71)$$

Valutiamo l'equazione del *gap* (3.68): per l'ipotesi di isotropia non c'è dipendenza dalle variabili angolari, per cui $d\mathbf{p} = 4\pi p^2 dp$. Ponendo $p = \hbar k$, si ha:

$$1 = \int_0^\infty dk \frac{4\pi \hbar^2 a_s}{m} \frac{4\pi \hbar^3 k^2}{(2\pi \hbar)^3} \left[\frac{1}{2 \frac{\hbar^2 k^2}{2m}} - \frac{\tanh \left(\frac{1}{2k_B T} \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu^*\right)^2 + \Delta^2} \right)}{2 \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu^*\right)^2 + \Delta^2}} \right] \quad (3.72)$$

Passando alle variabili precedentemente definite, si ha l'equazione adimensionale per il *gap*:

$$1 = \frac{2}{\pi} \bar{a} \int_0^\infty d\bar{k} \left[1 - \frac{\bar{k}^2 \tanh \left(\frac{1}{2\bar{T}} \sqrt{(\bar{k}^2 - \bar{\mu}^*)^2 + \bar{\Delta}^2} \right)}{\sqrt{(\bar{k}^2 - \bar{\mu}^*)^2 + \bar{\Delta}^2}} \right]. \quad (3.73)$$

Faccio lo stesso per l'equazione per la densità. Ricordando la definizione di impulso di Fermi:

$$k_F = (3\pi^2 \rho)^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{k_F^3}{3\pi^2}, \quad (3.74)$$

l'equazione (3.62) diventa:

$$1 = \frac{3}{2} \int_0^\infty d\bar{k} \bar{k}^2 \left[1 - \frac{(\bar{k}^2 - \bar{\mu}^*) \tanh \left(\frac{1}{2\bar{T}} \sqrt{(\bar{k}^2 - \bar{\mu}^*)^2 + \bar{\Delta}^2} \right)}{\sqrt{(\bar{k}^2 - \bar{\mu}^*)^2 + \bar{\Delta}^2}} \right]. \quad (3.75)$$

Introducendo le grandezze adimensionali,

$$\bar{\xi}_{\bar{k}} = \bar{k}^2 + \bar{\mu}^* \quad \bar{E}_{\bar{k}} = \sqrt{\bar{\xi}_{\bar{k}}^2 + \bar{\Delta}^2}, \quad (3.76)$$

le due equazioni (3.73), (3.75), acquistano una forma più compatta:

$$\frac{\pi}{2\bar{a}} = \int_0^\infty d\bar{k} \left[1 - \frac{\bar{k}^2}{\bar{E}_{\bar{k}}} \tanh\left(\frac{\bar{E}_{\bar{k}}}{2\bar{T}}\right) \right] \quad (3.77)$$

$$\frac{2}{3} = \int_0^\infty d\bar{k} \bar{k}^2 \left[1 - \frac{\bar{\xi}_{\bar{k}}}{\bar{E}_{\bar{k}}} \tanh\left(\frac{\bar{E}_{\bar{k}}}{2\bar{T}}\right) \right]. \quad (3.78)$$

Si osservi che la sola dipendenza esplicita è rimasta l'ampiezza di *scattering* in onda-S, grandezza che dipende dalla specie atomica considerata⁷; ma, come si è visto nel § 1.3, anche questa quantità si può variare. Non solo: nel limite unitario, in cui si perde anche la dipendenza da a_s , il comportamento di questo sistema diventa una funzione *universale* dell'energia di Fermi, e del rapporto T/T_F [59].

Dunque, fissate le grandezze adimensionali \bar{a} , \bar{T} la soluzione fisica corrisponde a un solo valore del *gap* e del potenziale chimico efficace che soddisfano il sistema non lineare formato da (3.78) e da (3.77); naturalmente, variando una sola delle grandezze e tenendo fissa l'altra si ottengono due curve; ho ottenuto il seguente andamento del potenziale chimico efficace (Fig. 3.1) e del *gap* (Fig. 3.2) fissando alcuni valori della temperatura e facendo variare la lunghezza di *scattering*. Osservando l'andamento di μ^* a temperature vicino allo zero si riconoscono i due regimi: BCS ($\bar{\mu}^* \approx 1$, ovvero $\mu \rightarrow \varepsilon_F$) per valori negativi e piccoli dell'ampiezza di *scattering* e BEC in cui il potenziale chimico efficace è negativo (rispettivamente i limiti sinistro e destro in Fig. 3.1). Il potenziale chimico è collegabile all'energia di legame della molecola con la relazione [51]:

$$\mu^*(0, a_s) = -\frac{E_b}{2} + \frac{2}{3\pi} k_F a_s \varepsilon_F, \quad \text{con } E_b = \frac{\hbar^2}{ma_s^2} \quad (3.79)$$

dove E_b è l'energia di legame. Inoltre si mostra (vedi ancora Fig. 3.1) che il potenziale chimico ha una scarsa dipendenza dalla temperatura. Questo risultato ottenuto con la procedura numerica se si vuole conferma il fatto fisico dato dall'equazione (3.79): l'energia di legame non può dipendere dalla temperatura.

Per quanto riguarda Δ , a $T = 0$ nel limite di interazione debole si può mostrare [42] che il *gap* dipende in modo esponenziale dalla costante d'accoppiamento, ovvero in questo caso da a_s . Anche noi ritroviamo questa caratteristica del regime BCS che è più chiara in Fig. 3.3: la dipendenza esponenziale è una retta in scala logaritmica. All'inizio del capitolo abbiamo detto che 2Δ nel limite BCS è direttamente collega-

⁷La dipendenza dalla massa è nascosta nella ε_F .

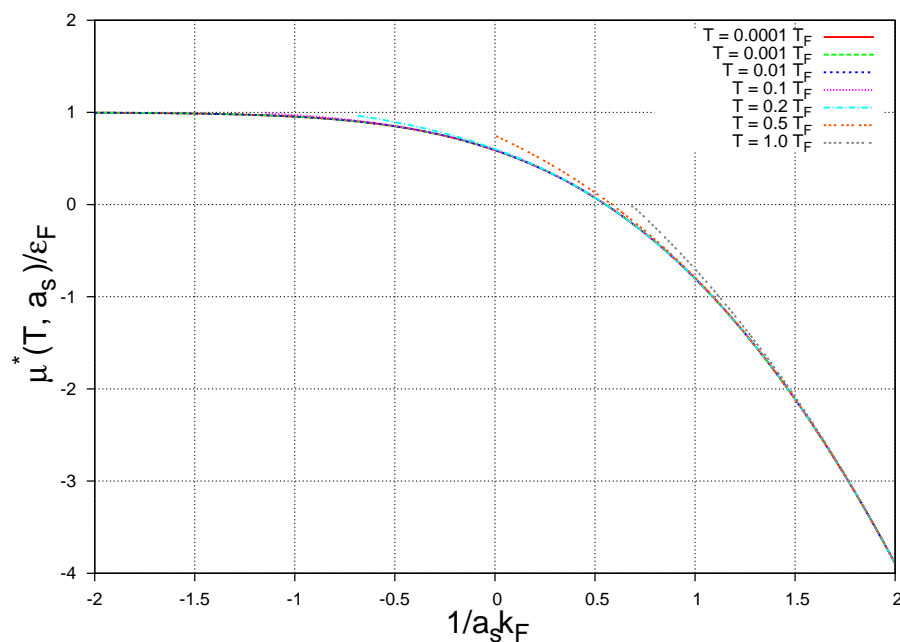


Figura 3.1: Andamento di $\mu^*(T, a_s)$ al variare della lunghezza di *scattering* a_s , per alcuni valori della temperatura.

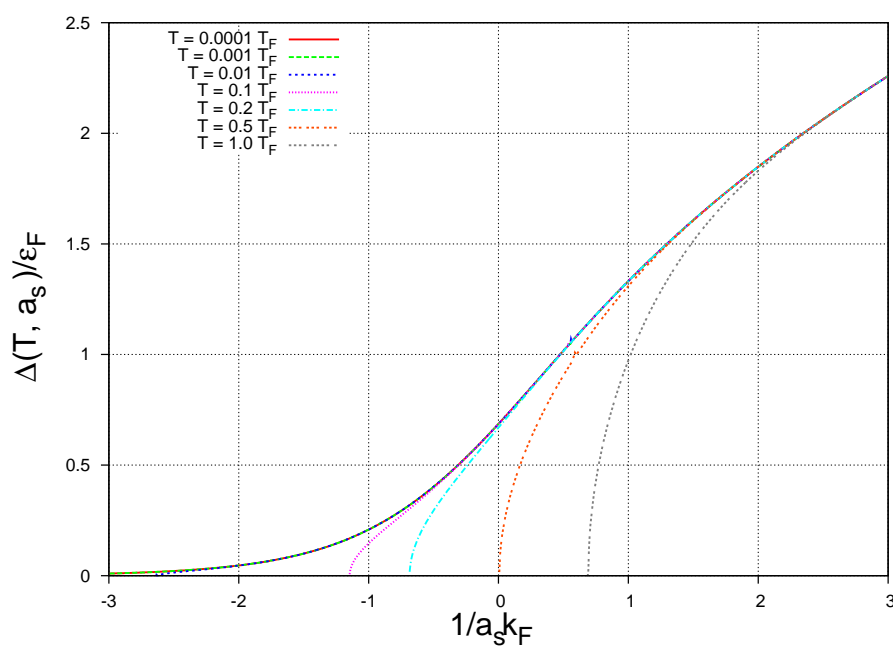


Figura 3.2: Andamento di $\Delta(T, a_s)$ al variare della lunghezza di *scattering* a_s , per alcuni valori della temperatura T .

bile con l'energia necessaria per rompere una coppia di Cooper: come è mostrato in Fig. 3.2 aumentando la temperatura la soglia del *gap* si sposta a destra, verso regimi

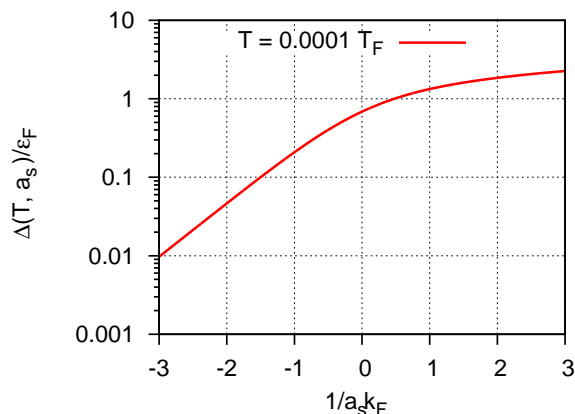


Figura 3.3: Andamento di $\Delta(T, a_s)$ al variare della lunghezza di *scattering* a_s , nel limite di bassa temperatura T , riportato in scala logaritmica.

di interazione forte. Questo effetto si può spiegare con il fatto che l'agitazione termica tende a rompere le coppie, e che queste si possono formare solo se si aumenta l'interazione tra le due particelle.

Fissiamo ora alcuni valori della lunghezza di *scattering*. Ci interessa la dipendenza dalla temperatura del potenziale chimico efficace e del *gap*; questi sono riportati rispettivamente in Fig. 3.4 e in Fig. 3.5.

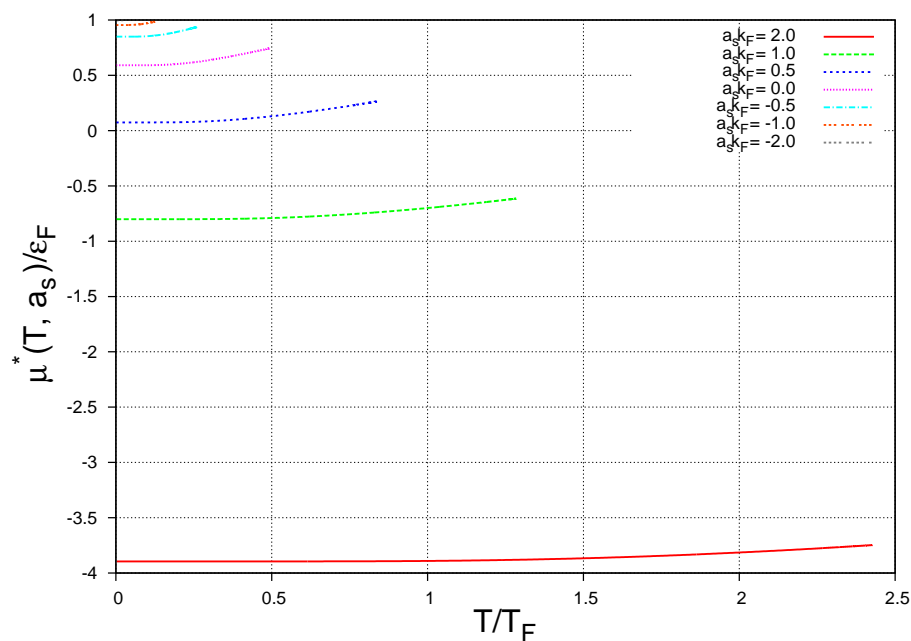


Figura 3.4: Andamento di $\mu^*(T, a_s)$ al variare della temperatura T , per alcuni valori della della lunghezza di *scattering*.

Mentre per il potenziale chimico questi andamenti confermano quanto detto sopra, cioè che in pratica non dipende da T , per il *gap* la Fig. 3.5 ci dà alcune importanti informazioni che è bene sottolineare. Il fatto più evidente è che il comportamento

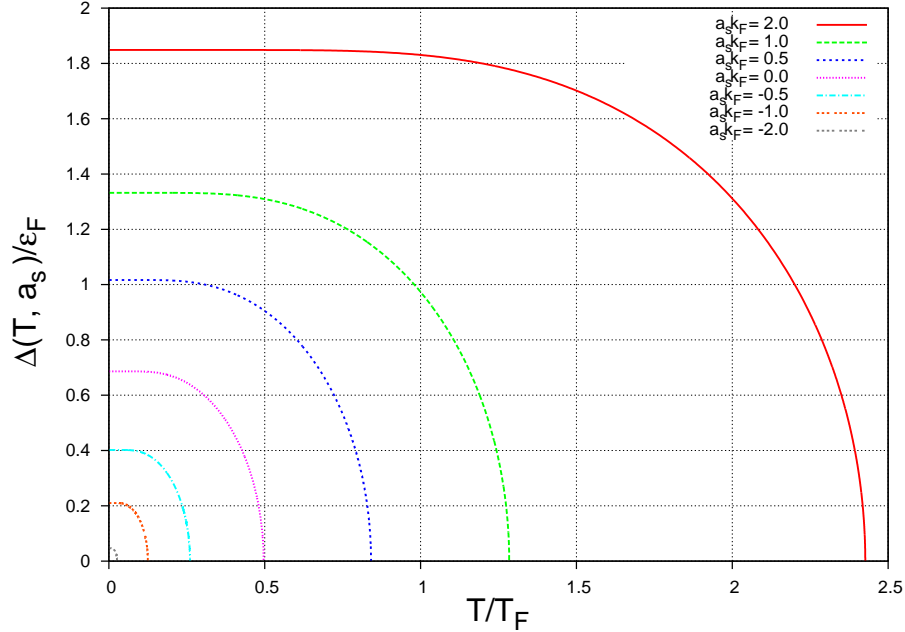
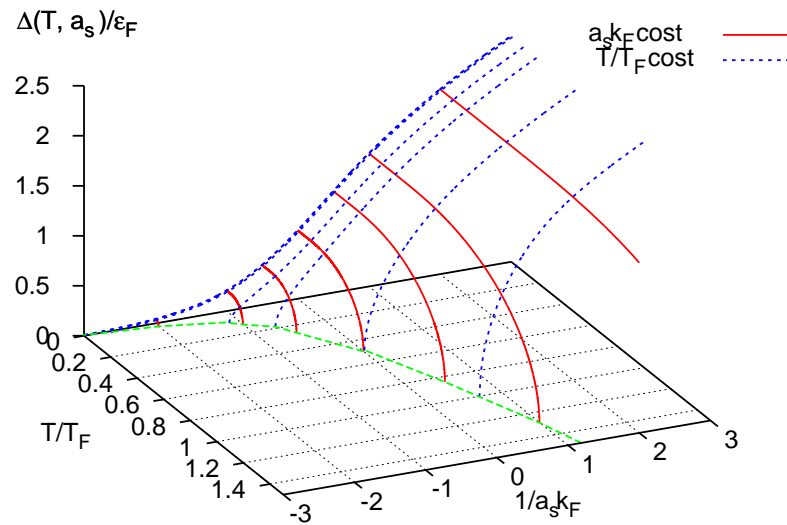


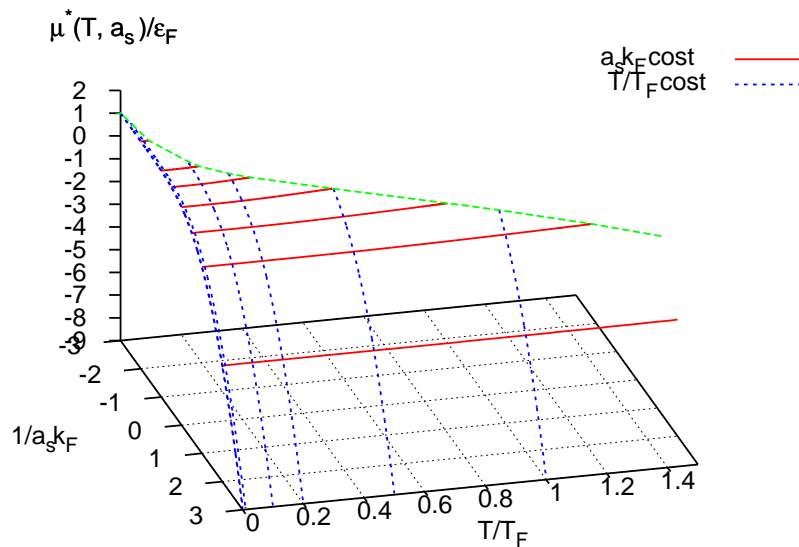
Figura 3.5: Andamento di $\Delta(T, a_s)$ al variare della temperatura T , per alcuni valori della lunghezza di *scattering*.

qualitativo di Δ in funzione della temperatura è simile indipendentemente dal regime di interazione: è costante per valori della temperatura attorno allo zero, poi decresce in maniera lenta fino a un punto in cui lo fa sempre più velocemente. Lo zero è raggiunto con derivata infinita ad una certa temperatura detta *temperatura critica*. Non sorprende il fatto che nel limite BCS l'andamento trovato è simile a quello del *gap* dello spettro di energia di eccitazione nei metalli superconduttivi [42]. Questo è l'andamento proprio del parametro d'ordine di una transizione di fase di seconda specie: infatti Δ viene chiamato anche parametro d'ordine [54]. Un'ultima osservazione: nel regime BEC si ha un *gap* finito anche a temperature elevate rispetto a T_F .

In generale al variare delle grandezze adimensionali \bar{a} , \bar{T} calcolare la soluzione fisica delle equazioni (3.78), (3.77) equivale a selezionare contemporaneamente due curve sulle due superfici, una nello spazio $(\bar{\Delta}, \bar{a}, \bar{T})$ l'altra nello spazio $(\bar{\mu}^*, \bar{a}, \bar{T})$. Dunque si può leggere il risultato trovato come curve coordinate di una superficie nello spazio dei parametri; il fatto è ancora più chiaro in Fig. 3.6.



(a) La soluzione delle due equazioni è una superficie nello spazio $(\bar{\Delta}, \bar{a}, \bar{T})$



(b) La soluzione delle due equazioni è una superficie nello spazio $(\bar{\mu}^*, \bar{a}, \bar{T})$

Figura 3.6: Andamenti di $\Delta(T, a_s)$, e $\mu^*(T, a_s)$ al variare della temperatura e della lunghezza di scattering.

Tra tutti i cammini possibili il più interessante da un punto di vista fisico, oltre alle curve coordinate ottenute in precedenza, è quello rappresentato da una linea verde in Fig. 3.6: è quello che corrisponde alla condizione in cui si sta sempre sulla

temperatura critica, ovvero tale per cui $\Delta(T = T_c, a_s) = 0$. In questo caso riportato in funzione della lunghezza di *scattering* l'andamento della temperatura critica (Fig. 3.7), e del potenziale chimico efficace valutato su questo cammino particolare (Fig. 3.8). L'andamento della temperatura critica è consistente con quello trovato in

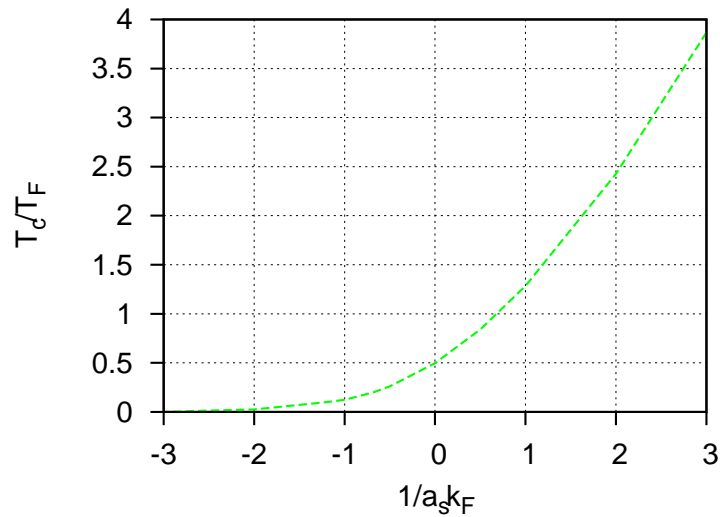


Figura 3.7: Andamento della temperatura critica T_c in funzione della lunghezza di *scattering* a_s .

[50]. A causa della forte dipendenza di μ^* dalla lunghezza di *scattering* l'andamento

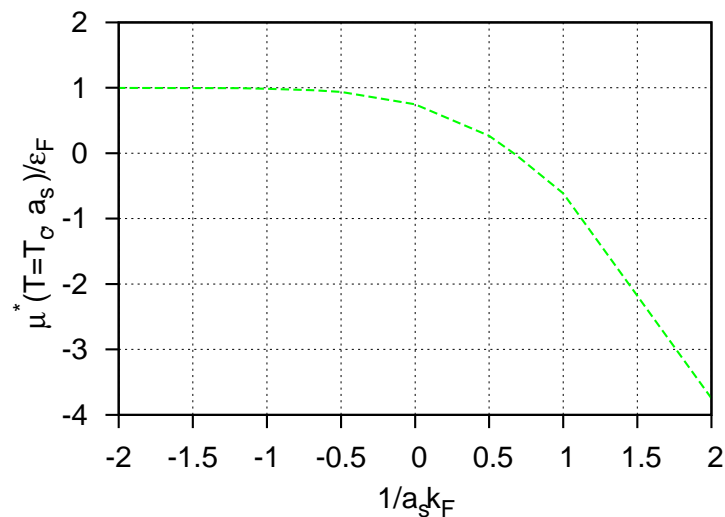


Figura 3.8: Estrapolazione dell'andamento della potenziale chimico efficace alla temperatura critica in funzione della lunghezza di *scattering*.

di Fig. 3.8 è da intendersi più in senso qualitativo che quantitativo.

3.5 *First sound*

Passiamo ad analizzare una grandezza che si può ricavare con i risultati precedentemente ottenuti: il *first sound*, ovvero il suono idrodinamico variazione della densità locale. Ricordo che a questo livello le grandezze in gioco non dipendono in maniera esplicita dal tempo, per cui anche questa è una quantità “statica”. In altre parole questo è il modo collettivo con frequenza e vettore d’onda nulli.

È noto che per una variazione sufficientemente piccola della densità, l’equazione di continuità linearizzata richiede:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \rho + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.80)$$

e l’equazione di moto di Newton richiede:

$$m \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P, \quad (3.81)$$

quindi l’equazione d’onda per il suono ordinario è:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta \rho = \frac{1}{m} \nabla^2 P(\rho_0 + \delta \rho) \quad (3.82)$$

$$= \frac{1}{m} \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{T,N} \nabla^2 \delta \rho. \quad (3.83)$$

Da cui si ricava l’espressione della velocità del suono:

$$c_s^2 = \left. \frac{1}{m} \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{T,N}. \quad (3.84)$$

Da questa si arriva all’espressione:

$$c_s^2 = \left. \frac{\rho}{m} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right|_T. \quad (3.85)$$

Adesso bisogna valutare il differenziale $\frac{\partial \mu}{\partial \rho}$. In questo caso si è trovato che il potenziale chimico è una funzione che dipende da ρ e da Δ , che a sua volta dipende da ρ e da T , ovvero:

$$\mu = \mu(\rho, T, \Delta) \quad \Delta = \Delta(\rho, T), \quad (3.86)$$

e quindi si può trovare mediante la regola della catena:

$$d\mu = \left. \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right|_{T,\Delta} d\rho + \left. \frac{\partial \mu}{\partial \Delta} \right|_{T,\rho} d\Delta + \left. \frac{\partial \mu}{\partial T} \right|_{\Delta,\rho} dT \quad (3.87)$$

$$d\Delta = \left. \frac{\partial \Delta}{\partial \rho} \right|_T d\rho + \left. \frac{\partial \Delta}{\partial T} \right|_\rho dT \quad (3.88)$$

Si è interessati al suono isothermico, che per $T \rightarrow 0$ coincide con il suono isoentropico:

$$d\mu = \left. \frac{\partial\mu}{\partial\rho} \right|_{T,\Delta} d\rho + \left. \frac{\partial\mu}{\partial\Delta} \right|_{T,\rho} \left. \frac{\partial\Delta}{\partial\rho} \right|_T d\rho \quad (3.89)$$

$$\frac{d\rho}{d\mu} = \left(\left. \frac{\partial\mu}{\partial\rho} \right|_{T,\Delta} + \left. \frac{\partial\mu}{\partial\Delta} \right|_{T,\rho} \left. \frac{\partial\Delta}{\partial\rho} \right|_T \right)^{-1} \quad (3.90)$$

Poichè queste equazioni sono espresse in termini del potenziale chimico efficace:

$$\mu = \mu^* + \frac{g}{2}\rho \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\mu}{\partial\rho} = \frac{\partial\mu^*}{\partial\rho} + \frac{g}{2} \quad (3.91)$$

si ha:

$$c_s^2 = \frac{\rho}{m} \left(\frac{1}{\frac{\partial\rho}{\partial\mu^*} + \frac{\partial\rho}{\partial\Delta} \frac{\partial\Delta}{\partial\mu^*}} + \frac{g}{2} \right). \quad (3.92)$$

Ricavandosi le derivate dall'equazione del *gap* e dall'equazione per la densità, e passando alle variabili adimensionali, dopo alcuni passaggi⁸ si trova

$$c_s^2 = \frac{\hbar^2 k_F^2}{3m^2} \left[\frac{1}{\frac{1}{2T} L_1[\bar{k}] + \frac{1}{2T} \frac{(L_2[\bar{k}])^2}{L_3[\bar{k}]}} + \frac{2}{\pi} \bar{a} \right] \quad (3.93)$$

in cui $L_1[\bar{k}]$, $L_2[\bar{k}]$, $L_3[\bar{k}]$ sono questi integrali nella grandezza adimensionale \bar{k} :

$$L_1[\bar{k}] = \int_0^\infty d\bar{k} \bar{k}^2 \frac{\bar{\xi}_{\bar{k}}^2}{E_{\bar{k}}^3} \left[\frac{2T\bar{E}_{\bar{k}}^2}{\bar{\xi}_{\bar{k}}^2} \tanh\left(\frac{\beta E}{2}\right) - 2T \tanh\left(\frac{\beta E}{2}\right) + \bar{E}_{\bar{k}} - \bar{E}_{\bar{k}} \tanh^2\left(\frac{\beta E}{2}\right) \right] \quad (3.94)$$

$$L_2[\bar{k}] = \int_0^\infty d\bar{k} \bar{k}^2 \frac{\bar{\xi}_{\bar{k}}}{E_{\bar{k}}^3} \left[-2T \tanh\left(\frac{\beta E}{2}\right) + \bar{E}_{\bar{k}} - \bar{E}_{\bar{k}} \tanh^2\left(\frac{\beta E}{2}\right) \right] \quad (3.95)$$

$$L_3[\bar{k}] = \int_0^\infty d\bar{k} \bar{k}^2 \frac{1}{E_{\bar{k}}^3} \left[2T \tanh\left(\frac{\beta E}{2}\right) + \bar{E}_{\bar{k}} \tanh^2\left(\frac{\beta E}{2}\right) - \bar{E}_{\bar{k}} \right]. \quad (3.96)$$

È chiaro che nel limite unitario, in cui $\frac{1}{a} \rightarrow 0$, appare un'infinito nell'ultima relazione (3.93). Anche questo caso deriva tecnicamente dal fatto che si è usato un potenziale a zero *range*, ma la differenza è più sottile: infatti il termine che si aggiunge non è altro che il contributo del potenziale di Hartree-Fock al potenziale chimico. Bisogna domandarci se la sostituzione del potenziale “vero” con la dipendenza esplicita da a_s , è corretta anche in questo caso. La risposta è negativa: infatti

⁸Il calcolo completo si trova in appendice § C.

mentre per la formazione delle coppie di Cooper la sostituzione è lecita, vedi § 3.3, non lo è nel caso di Hartree-Fock. Come è stato sottolineato nel paragrafo § 1.5 solo le particelle *nel mare di Fermi* danno contribuiscono al campo medio, non ci sono i contributi di particella al di fuori della superficie di Fermi. Bisogna utilizzare un potenziale quando a_s non è piccola: questa è una procedura diversa per “curare” il nuovo infinito. Questo potenziale deve essere tale da restituire la giusta a_s , ovvero tale da costruire il *pairing* tra gli atomi fermionici, per poterla usare nell’equazione del *gap*. Quindi prendendo spunto da un lavoro di Bargmann⁹ e seguendo l’articolo [61], si considera invece del potenziale a delta di Dirac, un potenziale di tipo buca con *hard core* attrattivo.

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} -V_0 & r < R_0 \\ 0 & r > R_0 \end{cases}. \quad (3.97)$$

Per questo tipo di potenziale è nota la relazione tra i suoi parametri caratteristici, come il raggio d’azione R_0 e la profondità della buca V_0 , e la lunghezza di *scattering* in onda-S:

$$a_s = R_0 \left[1 - \frac{\tan(K_0 R_0)}{K_0 R_0} \right], \quad (3.98)$$

dove $K_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$. Evidentemente si ha questo andamento;

$$K_0 R_0 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow a_s < 0 \quad (3.99)$$

$$K_0 R_0 > \frac{\pi}{2} \Rightarrow a_s > 0 \quad (3.100)$$

$$K_0 R_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a_s \rightarrow \infty. \quad (3.101)$$

Prima di proseguire torno alla definizione di potenziale chimico efficace:

$$\mu^* = \mu - \frac{g}{2}\rho. \quad (3.102)$$

Questo forma è coerente con il fatto che ho scelto un potenziale di contatto: nel caso generale, come ho già osservato nel § 1.5, il secondo addendo non è niente altro che il contributo Hartree-Fock all’energia:

$$\mu^* = \mu - \varepsilon_{HF}. \quad (3.103)$$

In ogni caso se ci si limita alla classe di potenziali a corto¹⁰ raggio d’azione $R_0 k_F \ll 1$, il contributo ε_{HF}

$$\varepsilon_{HF} = (2s + 1)V(\mathbf{k} = 0) \int d\mathbf{k} n_{\mathbf{k}} - \int d\mathbf{k}' V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') n_{\mathbf{k}'} \quad (3.104)$$

⁹Questo lavoro tratta il fatto che data *una serie* di ampiezze nello sviluppo in onde parziali esiste una *classe* di potenziali che la riproduce [60].

¹⁰Rispetto alla lunghezza caratteristica k_F^{-1} .

si riduce all'espressione semplice:

$$\simeq 2V(\mathbf{k} = 0)\rho - V(\mathbf{k} = 0)\rho \quad (3.105)$$

$$\simeq V(\mathbf{k} = 0)\rho. \quad (3.106)$$

Nel caso in esame del potenziale a buca quadrata, $V(\mathbf{k} = 0)$ è semplicemente il volume del *hard core* moltiplicato la profondità V_0 .

$$V(\mathbf{k} = 0) = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{k}=0} = -\frac{4}{3}\pi R_0^3 V_0. \quad (3.107)$$

Perciò il contributo del termine di Hartree-Fock al *first sound* non è niente altro che:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \rho} = \frac{\partial \mu^*}{\partial \rho} + \frac{\partial \varepsilon_{HF}}{\partial \rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mu}{\partial \rho} = \frac{\partial \mu^*}{\partial \rho} + V(\mathbf{k} = 0), \quad (3.108)$$

ovvero la trasformata di Fourier del potenziale calcolata a momento trasferito nullo. Passando alle variabili adimensionali:

$$c_s^2 = \frac{\rho}{m} \left[\frac{\partial \mu^*}{\partial \rho} + V(\mathbf{k} = 0) \right] \quad (3.109)$$

$$= \frac{\hbar^2 k_F^2}{3m^2} \left[\frac{1}{\frac{1}{2T} L_1[\bar{k}] + \frac{1}{2T} \frac{(L_2[\bar{k}])^2}{L_3[\bar{k}]} - \frac{2}{3\pi} \bar{R}_0^3 \bar{V}_0} \right], \quad (3.110)$$

dove ho introdotto le grandezze adimensionali $\bar{R}_0 = R_0 k_F$ e $\varepsilon_F \bar{V}_0 = V_0$. Dunque fissato $\bar{R}_0 \ll 1$, si trova un \bar{V}_0 tale che sia soluzione per una data \bar{a} dell'equazione trascendente:

$$\bar{R}_0 \left[1 - \frac{\tan(\bar{R}_0 \sqrt{\bar{V}_0})}{\bar{R}_0 \sqrt{\bar{V}_0}} \right] - \bar{a} = 0. \quad (3.111)$$

In appendice § C faccio vedere che nel limite $R_0 \rightarrow 0$, si riottiene il risultato (3.93) ottenuto con un potenziale di contatto.

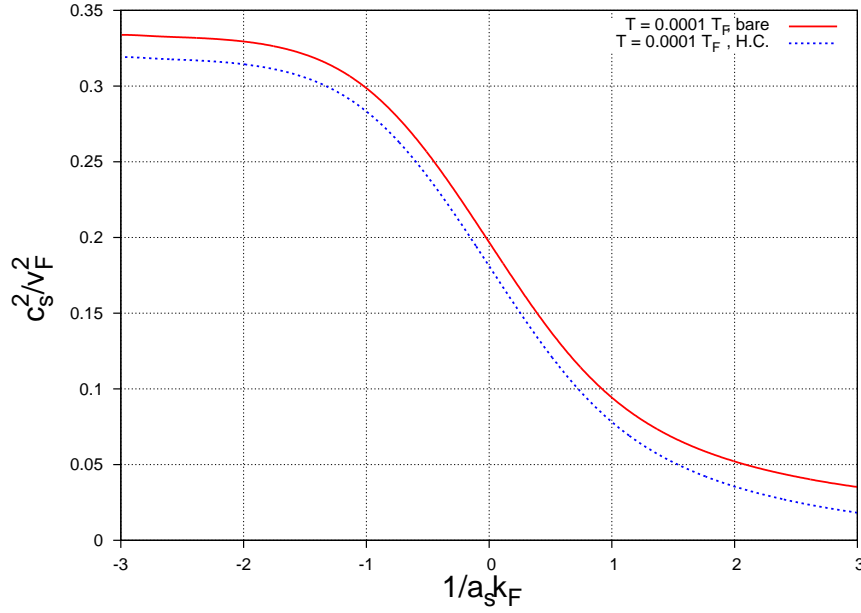


Figura 3.9: Confronto dell'andamento di c_s^2/v_F^2 al variare di a_s fissato un valore della temperatura T , senza (*bare*) e con (H.C.) il termine di Hartree-Fock.

In Fig. 3.9 mostro l'andamento di c_s^2/v_F^2 al variare di a_s nel limite di temperatura nulla con, e senza, il termine Hartree-Fock. Il risultato numerico è stato ottenuto con un particolare R_0 tale da soddisfare $k_F R_0 \ll 1$, condizione necessaria per rimanere nell'ambito dell'approssimazione semi-classica [61]. Nel caso mostrato in Fig. 3.9, e nelle successive, si è scelto $\bar{R}_0 = 0.03$, mentre \bar{V}_0 è stato calcolato in modo da soddisfare la (3.111) per ogni lunghezza di *scattering*. Dunque, l'effetto del contributo Hartree-Fock è di diminuire in maniera pressoché costante la velocità idrodinamica (vedi sempre Fig. 3.9); questo termine dà un contributo apprezzabile, di cui va tenuto conto; da notare che la riduzione data dal termine non è uniforme per ogni valore di a_s : è leggermente inferiore nel limite unitario rispetto agli altri regimi.

In Fig. 3.10 riporto l'andamento di c_s^2/v_F^2 con il termine Hartree-Fock al variare di a_s , per alcuni valori della temperatura T . Si notano subito le brusche interruzioni nell'andamento del suono: a questo livello possiamo dire che in quel punto il sistema di fermioni cessa di essere superfluido, e per quantificare cosa succede al suono idrodinamico è necessario uno ulteriore studio approfondito. Bisogna infatti stabilire cosa succede al suono se si considerano anche le fluttuazioni della temperatura.

Abbiamo indagato cosa succede analiticamente all'espressione del suono isotermico nel limite di temperatura nulla: bisogna calcolare i limiti dei tre integrali, questi

3.5. FIRST SOUND

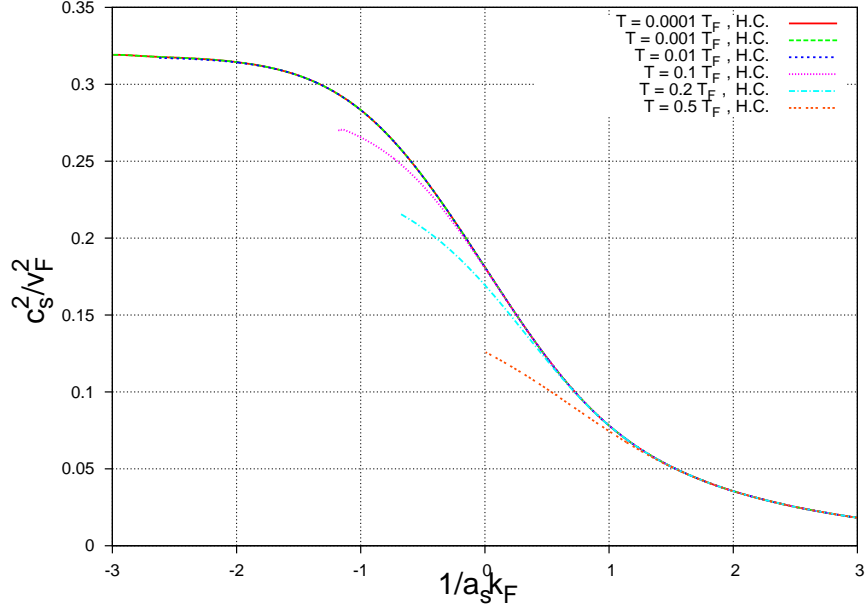


Figura 3.10: Andamento di c_s^2/v_F^2 al variare della lunghezza di *scattering* per alcuni valori della temperatura T , data dalla soluzione con termine Hartree-Fock. Con H.C. (*Hard Core*) si intende la soluzione normalizzata utilizzando il potenziale di tipo buca.

diventano [49]:

$$\lim_{\bar{T} \rightarrow 0} \frac{L_1[\bar{k}]}{2\bar{T}} = \int_0^\infty d\bar{k} \frac{\bar{k}^2}{E_{\bar{k}}} \left[1 - \frac{\bar{\xi}_{\bar{k}}^2}{E_{\bar{k}}^2} \right] = \int_0^\infty d\bar{k} \frac{\bar{k}^2 \bar{\Delta}^2}{E_{\bar{k}}^3} \equiv \bar{\Delta}^2 J_2 \quad (3.112)$$

$$\lim_{\bar{T} \rightarrow 0} \frac{L_2[\bar{k}]}{2\bar{T}} = - \int_0^\infty d\bar{k} \frac{\bar{k}^2 \bar{\xi}_{\bar{k}}}{E_{\bar{k}}^3} \equiv J_\xi \quad (3.113)$$

$$\lim_{\bar{T} \rightarrow 0} \frac{L_3[\bar{k}]}{2\bar{T}} = \int_0^\infty d\bar{k} \frac{\bar{k}^2}{E_{\bar{k}}^3} \equiv J_2. \quad (3.114)$$

Quindi l'espressione del *first sound* diventa:

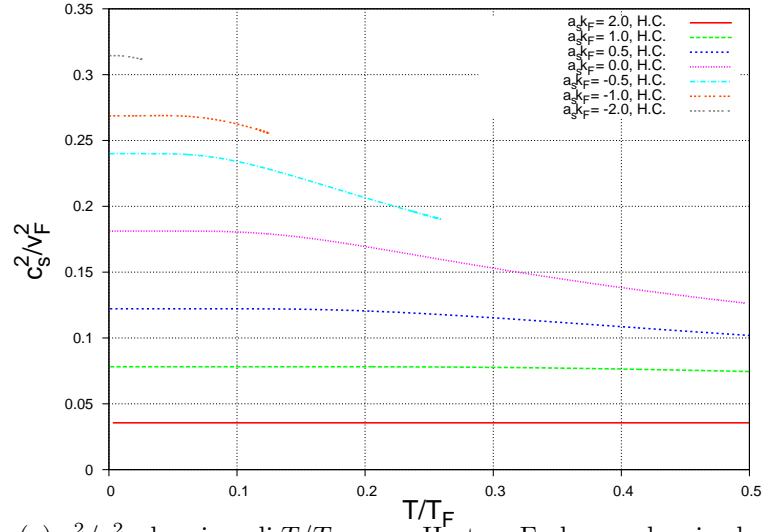
$$c_s^2 = \frac{\hbar^2 k_F^2}{3m^2} \left[\frac{J_2}{\bar{\Delta}^2 J_2^2 + J_\xi^2} - \frac{2}{3\pi} \bar{R}_0^3 \bar{V}_0 \right]. \quad (3.115)$$

Che è la stessa trovata in [49], con in più il contributo dell'interazione Hartree-Fock. Si può mostrare [49] che nel caso in cui $\Delta \rightarrow 0$ l'espressione precedente senza il termine HF tende al noto risultato [21].

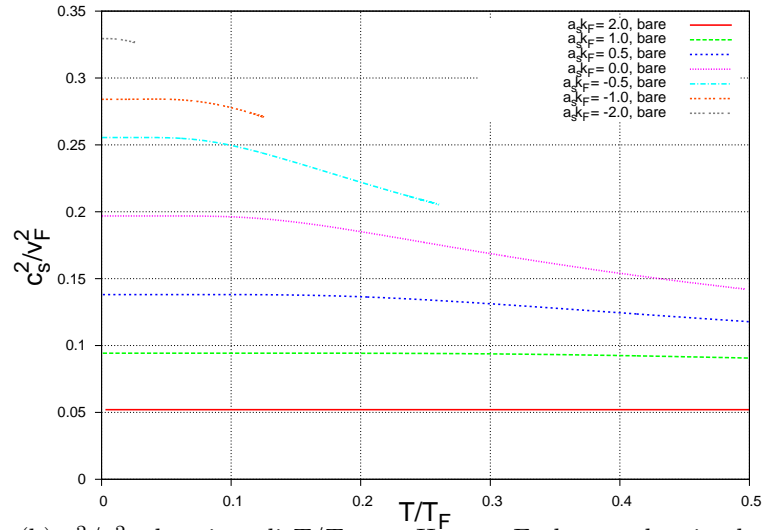
$$c_s^2 \simeq \frac{v_F^2}{3}. \quad (3.116)$$

3.5. FIRST SOUND

Questo risultato si ritrova anche nell'andamento mostrato in Fig. 3.9: da notare che il contributo del termine HF non si annulla (ancora) per i valori di a_s analizzati dal calcolo numerico. A questo proposito sottolineo il fatto che per ottenere il risultato delle due equazioni accoppiate per valori di $\bar{a}^{-1} < -3$ si è reso necessario aumentare la precisione di calcolo: c'è infatti un problema di cancellazione numerica che aumenta al diminuire di \bar{a}^{-1} . In Fig. 3.11 riporto l'andamento di c_s^2 al variare



(a) c_s^2/v_F^2 al variare di T/T_F senza Hartree-Fock, per alcuni valori di a_s



(b) c_s^2/v_F^2 al variare di T/T_F con Hartree-Fock, per alcuni valori di a_s

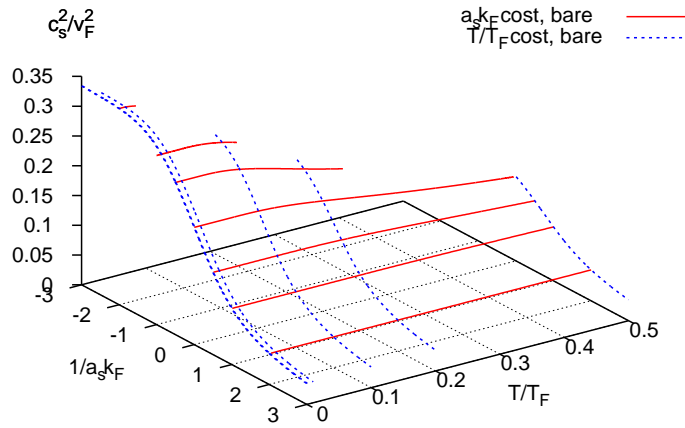
Figura 3.11: Andamento di c_s^2 al variare della temperatura T senza (*bare*) e con (H.C.) il contributo Hartree-Fock, per alcuni valori di a_s .

della temperatura T senza e con la soluzione ottenuta con il contributo Hartree-

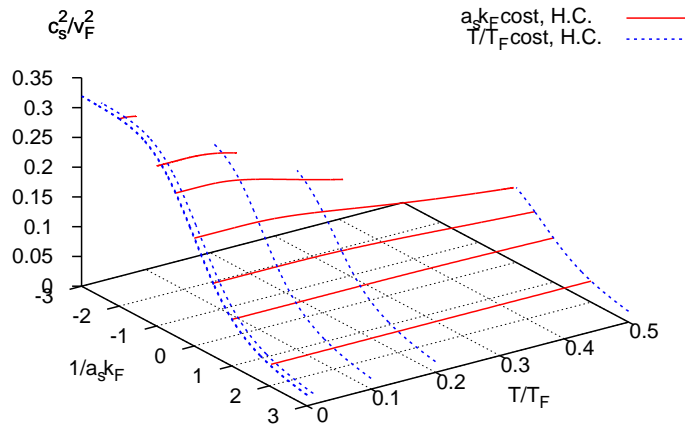
3.5. FIRST SOUND

Fock, per alcuni valori di a_s . In questo caso l'abbassamento dovuto al termine HF è costante; è interessante notare come la temperatura abbia un effetto di ridurre c_s^2 e che questo comportamento sia più accentuato nel limite BCS. Nel limite BEC, invece, il quadrato della velocità idrodinamica rimane pressoché costante al variare di T .

Infine i grafici mostrati in figura Fig. 3.12 danno un prospettiva dell'andamento del quadrato della velocità del suono, nello spazio dei parametri a_s e T .



(a) c_s^2/v_F^2 nello spazio dei parametri a_s e T senza Hartree-Fock



(b) c_s^2/v_F^2 nello spazio dei parametri a_s e T con Hartree-Fock

Figura 3.12: Andamenti di c_s^2/v_F^2 nello spazio dei parametri a_s e T . Come nella Fig. 3.11 con *bare* si intende la soluzione che viene solo dal contributo di μ^* e con H.C. si intende la soluzione data dal potenziale di tipo buca.

Capitolo 4

Caso Dinamico: equazioni cinetiche

In questo capitolo analizziamo il sistema di fermioni in condizioni dinamiche, cioè fuori dall'equilibrio. A causa del fatto che si sta considerando un gas diluito a basse temperature non si può supporre, in generale, che ci sia l'equilibrio termodinamico locale (ETL). Per questo motivo è più lecito un approccio cinetico, microscopico, rispetto a uno idrodinamico in cui appunto è richiesto ETL. In questa tesi siamo interessati alle piccole fluttuazioni rispetto all'equilibrio, e come queste si propagano nel sistema. Per calcolare la relazione di dispersione dei modi collettivi del sistema, ovvero come sono legate le frequenze dei modi con i vettori d'onda $\omega(q)$, è sufficiente l'approssimazione lineare del sistema di equazioni.

Questa è la struttura del capitolo: dopo aver definito le fluttuazioni delle grandezze § 4.1, si scrivono le equazioni cinetiche in approssimazione lineare (§ 4.2) e si definisce la maniera con cui trovare i modi collettivi § 4.3. Nel § 4.4 si mostrano i nuovi tagli sulle frequenze che emergono dal nostro calcolo; infine nel § 4.5 si mostrano gli integrali con cui si possono ottenere i modi collettivi del sistema.

4.1 Termine di ordine zero

Il primo passo da fare verso lo studio dei modi collettivi è procedere con la linearizzazione del *set* di equazioni (3.29). In questa ottica le equazioni del caso omogeneo all'equilibrio e le relative grandezze non sono altro che il termine di ordine zero nella fluttuazione delle nuove equazioni. In altre parole per ciascuna variabile posso definire lo sviluppo in termini di una fluttuazione:

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = F_0(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \delta\rho(\mathbf{x}, t) \quad (4.1a)$$

$$D(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = D_0(\mathbf{p}) + d(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) \quad \bar{D}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = \bar{D}_0(\mathbf{p}) + \bar{d}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) \quad (4.1b)$$

$$\Delta(\mathbf{x}, t) = \Delta_0 + \sigma(\mathbf{x}, t) \quad \Delta^*(\mathbf{x}, t) = \Delta_0^* + \sigma^*(\mathbf{x}, t) \quad (4.1c)$$

$$\xi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \xi_0(\mathbf{p}) + \delta\xi(\mathbf{x}, t) \quad . \quad (4.1d)$$

Nell'ultima espressione si ha che:

$$\xi_0(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{g}{2}\rho_0 - \mu \quad \delta\xi = \frac{g}{2}\delta\rho(\mathbf{x}, t). \quad (4.2)$$

Le relazioni tra le varie grandezze e le rispettive trasformate di Wigner valgono ordine per ordine, per esempio:

$$\Delta_0 = -g \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} D_0(\mathbf{p}) \quad \sigma(\mathbf{x}, t) = -g \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} d(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t),$$

e così per tutte le altre.

In particolare ricordo che se si richiede che all'equilibrio termodinamico il *gap* sia una quantità reale, dalle (3.40) (3.41) si ha:

$$2\Re D_0 = 2 \left[\frac{\Delta_0}{2E_0} \tanh \Theta_0 \right] \quad (4.3)$$

$$-2i\Im D_0 = 0. \quad (4.4)$$

ovvero anche la trasformata di Wigner anomala all'equilibrio è reale.

4.2 Linearizzazione

La procedura di linearizzazione consiste nell'esprimere ogni grandezza del sistema di equazioni (3.29) secondo la scomposizione (4.1), e considerare solo i termini del primo ordine nelle fluttuazioni. Per esempio per l'equazione dell'evoluzione temporale della funzione di Wigner si avrà:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [F_0(\mathbf{p}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)] &= i\hbar \{ \xi_0(\mathbf{p}) + \delta\xi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), F_0(\mathbf{p}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \} \\ &\quad + 2i\Im \left[(D_0(\mathbf{p}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)) (\Delta_0^* + \sigma^*(\mathbf{x}, t)) \right] \\ &\quad - i\hbar \Re \left[\{ \Delta_0^* + \sigma^*(\mathbf{x}, t), D_0(\mathbf{p}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \} \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Di questa si prendono solo i termini del primo ordine nella fluttuazione. Si arriva all'equazione per l'evoluzione temporale della fluttuazione della funzione di Wigner f :

$$i\hbar \partial_t f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = -i\hbar \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + i\hbar \frac{g}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \delta\rho(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} F_0(\mathbf{p})$$

$$\begin{aligned}
 & + 2iD_0(\mathbf{p})\mathfrak{I}\mathfrak{m}[\sigma^*(\mathbf{x}, t)] + 2i\mathfrak{I}\mathfrak{m}[d(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)]\Delta_0 \\
 & - i\hbar\mathfrak{R}\mathfrak{e}[\nabla_{\mathbf{x}}\sigma^*(\mathbf{x}, t)] \cdot \nabla_{\mathbf{p}}D_0(\mathbf{p})
 \end{aligned} \tag{4.6a}$$

Seguendo questa procedura si ottengono le altre tre equazioni per l'evoluzione temporale delle fluttuazioni.

$$\begin{aligned}
 i\hbar\partial_t f(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t) & = +i\hbar\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t) - i\hbar\frac{g}{2}\nabla_{\mathbf{x}}\delta\rho(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{p}}F_0(\mathbf{p}) \\
 & - 2iD_0(\mathbf{p})\mathfrak{I}\mathfrak{m}[\sigma(\mathbf{x}, t)] + 2i\mathfrak{I}\mathfrak{m}[d(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)]\Delta_0 \\
 & + i\hbar\nabla_{\mathbf{x}}\mathfrak{R}\mathfrak{e}[\sigma(\mathbf{x}, t)] \cdot \nabla_{\mathbf{p}}D_0(\mathbf{p})
 \end{aligned} \tag{4.6b}$$

$$\begin{aligned}
 i\hbar\partial_t d(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) & = 2\xi_0(\mathbf{p})d(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + g\delta\rho(\mathbf{x}, t)D_0(\mathbf{p}) \\
 & + \Delta_0 [f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + f(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t)] \\
 & + \sigma(\mathbf{x}, t) [2F_0(\mathbf{p}) - 1]
 \end{aligned} \tag{4.6c}$$

$$\begin{aligned}
 i\hbar\partial_t \bar{d}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) & = -2\xi_0(\mathbf{p})\bar{d}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - g\delta\rho(\mathbf{x}, t)D_0(\mathbf{p}) \\
 & - \Delta_0 [f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + f(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t)] \\
 & - \sigma^*(\mathbf{x}, t) [2F_0(\mathbf{p}) - 1].
 \end{aligned} \tag{4.6d}$$

Abbiamo osservato che il termine zero del *gap* e della funzione di Wigner anomala sono funzioni reali. In generale però non lo sono le fluttuazioni, per cui:

$$\sigma = \mathfrak{R}\mathfrak{e}[\sigma] + i\mathfrak{I}\mathfrak{m}[\sigma] = \sigma_{\Re} + i\sigma_{\Im} \quad \sigma^* = \mathfrak{R}\mathfrak{e}[\sigma] - i\mathfrak{I}\mathfrak{m}[\sigma] = \sigma_{\Re} - i\sigma_{\Im} \tag{4.7}$$

$$d = \mathfrak{R}\mathfrak{e}[d] + i\mathfrak{I}\mathfrak{m}[d] = d_{\Re} + id_{\Im} \quad \bar{d} = \mathfrak{R}\mathfrak{e}[\bar{d}] + i\mathfrak{I}\mathfrak{m}[\bar{d}] = d_{\Re} - id_{\Im}. \tag{4.8}$$

Con queste notazioni si ha:

$$\begin{aligned}
 \hbar\partial_t f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) & = -\hbar\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \hbar\frac{g}{2}\nabla_{\mathbf{x}}\delta\rho(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{p}}F_0(\mathbf{p}) \\
 & - 2D_0(\mathbf{p})\sigma_{\Im}(\mathbf{x}, t) + 2d_{\Im}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\Delta_0 \\
 & - \hbar\nabla_{\mathbf{x}}\sigma_{\Re}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{p}}D_0(\mathbf{p})
 \end{aligned} \tag{4.9a}$$

$$\begin{aligned}
 \hbar\partial_t f(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t) & = \hbar\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t) - \hbar\frac{g}{2}\nabla_{\mathbf{x}}\delta\rho(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{p}}F_0(\mathbf{p}) \\
 & - 2D_0(\mathbf{p})\sigma_{\Im}(\mathbf{x}, t) + 2d_{\Im}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\Delta_0 \\
 & + \hbar\nabla_{\mathbf{x}}\sigma_{\Re}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{p}}D_0(\mathbf{p})
 \end{aligned} \tag{4.9b}$$

$$\begin{aligned}
 \hbar\partial_t [id_{\Re}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - d_{\Im}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)] & = 2\xi_0(\mathbf{p})[d_{\Re}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + id_{\Im}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)] + g\delta\rho(\mathbf{x}, t)D_0(\mathbf{p}) \\
 & + \Delta_0 [f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + f(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t)] \\
 & + [\sigma_{\Re}(\mathbf{x}, t) + i\sigma_{\Im}(\mathbf{x}, t)] [2F_0(\mathbf{p}) - 1]
 \end{aligned} \tag{4.9c}$$

$$\begin{aligned}
 \hbar\partial_t [id_{\Re}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + d_{\Im}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)] & = -2\xi_0(\mathbf{p})[d_{\Re}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - id_{\Im}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)] - g\delta\rho(\mathbf{x}, t)D_0(\mathbf{p}) \\
 & - \Delta_0 [f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + f(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t)]
 \end{aligned}$$

$$- [\sigma_{\Re}(\mathbf{x}, t) - i\sigma_{\Im}(\mathbf{x}, t)] [2F_0(\mathbf{p}) - 1]. \quad (4.9d)$$

Introducendo la parte pari e dispari della $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$, definite rispettivamente

$$f_{ev}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + f(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t)}{2} \quad (4.10)$$

$$f_{od}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - f(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t)}{2}, \quad (4.11)$$

si trova il sistema di quattro equazioni in quattro incognite reali:

$$\hbar\partial_t f_{ev}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = -\hbar\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_{od}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - 2D_0(\mathbf{p})\sigma_{\Im}(\mathbf{x}, t) + 2d_{\Im}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\Delta_0 \quad (4.12a)$$

$$\begin{aligned} \hbar\partial_t f_{od}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= -\hbar\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_{ev}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \hbar\frac{g}{2}\nabla_{\mathbf{x}}\delta\rho(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{p}}F_0(\mathbf{p}) \\ &\quad - \hbar\nabla_{\mathbf{x}}\sigma_{\Re}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{p}}D_0(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (4.12b)$$

$$\begin{aligned} \hbar\partial_t d_{\Im}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= -2\xi_0(\mathbf{p})d_{\Re}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - g\delta\rho(\mathbf{x}, t)D_0(\mathbf{p}) - 2\Delta_0 f_{ev}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\ &\quad - \sigma_{\Re}(\mathbf{x}, t) [2F_0(\mathbf{p}) - 1] \end{aligned} \quad (4.12c)$$

$$\hbar\partial_t d_{\Re}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = 2\xi_0(\mathbf{p})d_{\Im}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \sigma_{\Im}(\mathbf{x}, t) [2F_0(\mathbf{p}) - 1]. \quad (4.12d)$$

Osserviamo la dipendenza da \hbar nella prima e nella seconda equazione: se si sviluppano le grandezze in potenze di \hbar , il termine $\hbar\partial_t d_{\Im}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ a questo livello può sembrare di ordine superiore al primo, e dunque trascurabile [43]. La sua importanza però può essere vista solo nei risultati finali: infatti se si prosegue nei calcoli ponendo uguale a zero il primo membro della terza equazione, si trovano delle contraddizioni di ordine fisico, come scoprire che $f_{od}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = 0$ nel nostro caso. Dunque, a differenza di quanto fatto in [43], seguiamo nei calcoli senza nessuna ulteriore approssimazione. Passando alle grandezze trasformate di Fourier, rispetto al tempo e allo spazio,

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \iint dt d\mathbf{x} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) e^{-i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \omega),$$

le quattro equazioni diventano:

$$-i\hbar\omega f_{ev}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \omega) = -i\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q} f_{od}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \omega) - 2D_0\sigma_{\Im}(\mathbf{q}, \omega) + 2d_{\Im}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \omega)\Delta_0 \quad (4.13a)$$

$$\begin{aligned} -i\hbar\omega f_{od}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \omega) &= -i\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q} f_{ev}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \omega) + i\hbar\frac{g}{2}\mathbf{q}\delta\rho(\mathbf{q}, \omega) \cdot \mathbf{v}\partial_{\xi}F_0 \\ &\quad - i\hbar\mathbf{q}\sigma_{\Re}(\mathbf{q}, \omega) \cdot \mathbf{v}\partial_{\xi}D_0 \end{aligned} \quad (4.13b)$$

$$\begin{aligned} -i\hbar\omega d_{\Im}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \omega) &= -2\xi_0(\mathbf{p})d_{\Re}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \omega) - g\delta\rho(\mathbf{q}, \omega)D_0(\mathbf{p}) - 2\Delta_0 f_{ev}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \omega) \\ &\quad - \sigma_{\Re}(\mathbf{q}, \omega) [2F_0(\mathbf{p}) - 1] \end{aligned} \quad (4.13c)$$

$$-i\hbar\omega d_{\Re}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \omega) = 2\xi_0(\mathbf{p})d_{\Im}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \omega) + \sigma_{\Im}(\mathbf{q}, \omega) [2F_0(\mathbf{p}) - 1], \quad (4.13d)$$

dove ho introdotto la velocità della particella $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m}$, e ho usato il fatto che $\nabla_{\mathbf{p}} \equiv \mathbf{v}\partial_{\xi}$. Osservo che sono passato da equazioni differenziali accoppiate a un sistema di equazioni algebriche. Per non appesantire le notazioni dei prossimi calcoli, ometto la dipendenza esplicita dalle variabili.

$$\hbar\omega f_{ev} = \hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}f_{od} - 2iD_0\sigma_{\Im} + 2id_{\Im}\Delta_0 \quad (4.14a)$$

$$\hbar\omega f_{od} = \hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}f_{ev} - \hbar\frac{g}{2}\mathbf{q}\delta\rho \cdot \mathbf{v}\partial_{\xi}F_0 + \hbar\mathbf{q}\sigma_{\Re} \cdot \mathbf{v}\partial_{\xi}D_0 \quad (4.14b)$$

$$\hbar\omega d_{\Im} = -2i\xi_0 d_{\Re} - ig\delta\rho D_0 - 2i\Delta_0 f_{ev} - i\sigma_{\Re}[2F_0 - 1] \quad (4.14c)$$

$$\hbar\omega d_{\Re} = 2i\xi_0 d_{\Im} + i\sigma_{\Im}[2F_0 - 1]. \quad (4.14d)$$

Osservando la (4.14c) è ancora più chiaro che l'argomento dello sviluppo in \hbar non regge, questa volta per un motivo fisico. Infatti $\hbar\omega$ è una energia che si può confrontare con ξ_0 e con Δ_0 : queste quantità possono essere molto piccole, ξ_0 *si annulla*, quando $\mu^* > 0$, per $\varepsilon_p = \mu^*$.

Non riporto tutti i passaggi espliciti per fattorizzare la dipendenza da $g\delta\rho$, σ_{\Re} , σ_{\Im} delle fluttuazioni delle trasformate di Wigner, ma solo i risultati principali. Per arrivare all'espressione di f_{ev} :

1) Si elimina f_{od} moltiplicando la (4.14a) per $\hbar\omega$, la (4.14b) per $\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}$; poi sommando m.a.m. si ottiene:

$$\begin{aligned} [(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2]f_{ev} &= -2i\hbar\omega D_0\sigma_{\Im} + 2i\hbar\omega d_{\Im}\Delta_0 \\ &\quad - \frac{g}{2}\delta\rho(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2\partial_{\xi}F_0 + (\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2\sigma_{\Re}\partial_{\xi}D_0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

2) Si elimina la d_{\Re} moltiplicando la (4.14c) per $\hbar\omega$, la (4.14d) per $-2i\xi_0$; poi sommando m.a.m. si ottiene:

$$\begin{aligned} [(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2]d_{\Im} &= -i\hbar\omega g\delta\rho D_0 - 2i\hbar\omega\Delta_0 f_{ev} - i\hbar\omega\sigma_{\Re}(2F_0 - 1) \\ &\quad + 2\xi_0\sigma_{\Im}(2F_0 - 1). \end{aligned}$$

3) Si arriva a due equazioni in due incognite f_{ev} , d_{\Im} , che riscrivo:

$$\begin{aligned} [(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2]f_{ev} &= -2i\hbar\omega D_0\sigma_{\Im} + 2i\hbar\omega d_{\Im}\Delta_0 \\ &\quad - \frac{g}{2}\delta\rho(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2\partial_{\xi}F_0 + (\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2\sigma_{\Re}\partial_{\xi}D_0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} [(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2]d_{\Im} &= -i\hbar\omega g\delta\rho D_0 - 2i\hbar\omega\Delta_0 f_{ev} - i\hbar\omega\sigma_{\Re}(2F_0 - 1) \\ &\quad + 2\xi_0\sigma_{\Im}(2F_0 - 1). \end{aligned} \quad (4.17)$$

4) Si elimina la d_{\Im} moltiplicando la (4.16) per $[(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2]$, la (4.17) per $2i\hbar\omega\Delta_0$; poi sommando m.a.m. si arriva dopo qualche passaggio a:

$$[(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2][(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2]f_{ev} = -2i(\hbar\omega)^3 D_0\sigma_{\Im} + 8i\hbar\omega\xi_0^2 D_0\sigma_{\Im}$$

$$\begin{aligned}
 & +(\hbar\omega)^2(\hbar\mathbf{q}\cdot\mathbf{v})^2\sigma_{\Re}\partial_{\xi}D_0 - 4\xi_0^2(\hbar\mathbf{q}\cdot\mathbf{v})^2\sigma_{\Re}\partial_{\xi}D_0 \\
 & -\frac{g}{2}\delta\rho(\hbar\mathbf{q}\cdot\mathbf{v})^2\partial_{\xi}F_0[(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2] \\
 & +2\Delta_0(\hbar\omega)^2\sigma_{\Re}(2F_0 - 1) + 4i\Delta_0\xi_0\hbar\omega\sigma_{\Im}(2F_0 - 1) \\
 & +2\Delta_0(\hbar\omega)^2g\delta\rho D_0 + 4(\hbar\omega)^2\Delta_0^2f_{ev}. \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

Dopo alcune semplificazioni si raggiunge il risultato per f_{ev} :

$$\begin{aligned}
 f_{ev} &= \frac{[(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2](\hbar\mathbf{q}\cdot\mathbf{v})^2\partial_{\xi}D_0 + 2\Delta_0(\hbar\omega)^2(2F_0 - 1)}{[(\hbar\omega)^2 - 4E_0^2][(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2] - 4\Delta_0^2(\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2}\sigma_{\Re} \\
 & + 2i\hbar\omega\frac{2\Delta_0\xi_0(2F_0 - 1) - [(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2]D_0}{[(\hbar\omega)^2 - 4E_0^2][(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2] - 4\Delta_0^2(\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2}\sigma_{\Im} \\
 & + \frac{4(\hbar\omega)^2\Delta_0D_0 - [(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2](\hbar\mathbf{q}\cdot\mathbf{v})^2\partial_{\xi}F_0}{[(\hbar\omega)^2 - 4E_0^2][(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2] - 4\Delta_0^2(\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2}\frac{g}{2}\delta\rho. \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

Analogamente si ottiene per le fluttuazioni della trasformata di Wigner anomala: Questa è l'equazione per la d_{\Im} :

$$\begin{aligned}
 d_{\Im} &= \frac{-2i\hbar\omega\Delta_0(\hbar\mathbf{q}\cdot\mathbf{v})^2\partial_{\xi}D_0 - i\hbar\omega[(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2](2F_0 - 1)}{[(\hbar\omega)^2 - 4E_0^2][(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2] - 4\Delta_0^2(\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2}\sigma_{\Re} \\
 & + \frac{-4(\hbar\omega)^2\Delta_0D_0 + 2\xi_0[(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2](2F_0 - 1)}{[(\hbar\omega)^2 - 4E_0^2][(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2] - 4\Delta_0^2(\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2}\sigma_{\Im} \\
 & + \frac{2i\hbar\omega(\hbar\mathbf{q}\cdot\mathbf{v})^2\Delta_0\partial_{\xi}F_0 - 2i\hbar\omega[(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2]D_0}{[(\hbar\omega)^2 - 4E_0^2][(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2] - 4\Delta_0^2(\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2}\frac{g}{2}\delta\rho. \tag{4.20}
 \end{aligned}$$

Usando la (4.14d), fatte le dovute sostituzioni, si arriva anche all'espressione per la d_{\Re} :

$$\begin{aligned}
 d_{\Re} &= \frac{4\xi_0\Delta_0(\hbar\mathbf{q}\cdot\mathbf{v})^2\partial_{\xi}D_0 + 2\xi_0[(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2](2F_0 - 1)}{[(\hbar\omega)^2 - 4E_0^2][(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2] - 4\Delta_0^2(\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2}\sigma_{\Re} \\
 & + \frac{-8i(\hbar\omega)^2\xi_0\Delta_0D_0 + i(\hbar\omega)^2\{[(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2] - 4\Delta_0^2\}(2F_0 - 1)}{[(\hbar\omega)^2 - 4E_0^2][(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2] - 4\Delta_0^2(\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2}\sigma_{\Im} \\
 & + \frac{-4\xi_0(\hbar\mathbf{q}\cdot\mathbf{v})^2\Delta_0\partial_{\xi}F_0 + 4\xi_0[(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2]D_0}{[(\hbar\omega)^2 - 4E_0^2][(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2] - 4\Delta_0^2(\hbar\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})^2}\frac{g}{2}\delta\rho. \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

4.3 Frequenze dei modi collettivi

In sintesi il sistema di equazioni si può esprimere come

$$\begin{cases} f_{ev} &= C_{11}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)g\delta\rho + C_{12}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)\sigma_{\Re} + C_{13}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)\sigma_{\Im} \\ d_{\Re} &= C_{21}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)g\delta\rho + C_{22}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)\sigma_{\Re} + C_{23}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)\sigma_{\Im} \\ d_{\Im} &= C_{31}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)g\delta\rho + C_{32}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)\sigma_{\Re} + C_{33}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)\sigma_{\Im} \end{cases} \quad (4.22)$$

Dunque per trovare un sistema di equazioni che leghi tra loro le fluttuazioni di densità $\delta\rho(\mathbf{q}, \omega)$, $\sigma_{\Re}(\mathbf{q}, \omega)$, $\sigma_{\Im}(\mathbf{q}, \omega)$ le tre equazioni (4.22) vanno integrate in \mathbf{p} : è comodo definire gli integrali dei i coefficienti C_{ij} :

$$\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} C_{ij}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega) = b_{ij}(\mathbf{q}, \omega). \quad (4.23)$$

Integrando $-g \int \frac{d\mathbf{p}}{\hbar^3}$ da ambo i membri: a destra si usando le definizioni analoghe alla (4.1):

$$\sigma_{\Re}(\mathbf{q}, \omega) = -g \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} d_{\Re}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega) \quad \sigma_{\Im}(\mathbf{q}, \omega) = -g \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} d_{\Im}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega) \quad (4.24)$$

$$f_{ev}(\mathbf{q}, \omega) = -g \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \delta\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega) \quad (4.25)$$

Da notare che per ragioni di simmetria l'equazione per $\delta\rho$ ci consente di non considerare nella sistema (4.22) la dipendenza esplicita da f_{od} ¹. Si ottiene pertanto il sistema

$$\begin{cases} g\delta\rho &= +[gb_{11}(\mathbf{q}, \omega)]g\delta\rho + gb_{12}(\mathbf{q}, \omega)\sigma_{\Re} + gb_{13}(\mathbf{q}, \omega)\sigma_{\Im} \\ \sigma_{\Re} &= -[gb_{21}(\mathbf{q}, \omega)]g\delta\rho - gb_{22}(\mathbf{q}, \omega)\sigma_{\Re} - gb_{23}(\mathbf{q}, \omega)\sigma_{\Im} \\ \sigma_{\Im} &= -[gb_{31}(\mathbf{q}, \omega)]g\delta\rho - gb_{32}(\mathbf{q}, \omega)\sigma_{\Re} - gb_{33}(\mathbf{q}, \omega)\sigma_{\Im} \end{cases} \quad (4.26)$$

Questa scrittura ci ricorda che mentre le grandezze F_0 e D_0 e le loro variazioni sono dei numeri, le grandezze σ_{\Re} σ_{\Im} sono dimensionate: sono delle energie, per avere la stessa dimensione occorre moltiplicare la fluttuazione di densità per la costante di accoppiamento g .

Le autofrequenze del sistema si hanno per quella coppia di valori (ω, q) che risolvono il sistema (4.26), ovvero annullano il determinante della matrice associata.

$$\begin{vmatrix} (-1 + gb_{11}) & +gb_{12} & +gb_{13} \\ -gb_{21} & (-gb_{22} - 1) & -gb_{23} \\ -gb_{31} & -gb_{32} & (-gb_{33} - 1) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.27)$$

In questa maniera una volta risolto si ricava la relazione di dispersione dei modi collettivi (ω, q) . Torniamo ai coefficienti $C_{ij}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)$, in particolare i limiti nel caso

¹Ma alla fine del paragrafo vedremo che è necessario che sia diverso da zero.

di temperatura nulla e il caso in cui il *gap* tende a zero. Indico con \mathcal{D} il denominatore comune delle (4.19), (4.20), (4.21):

$$\mathcal{D} = \{[(\hbar\omega)^2 - 4E_0^2][(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2] - 4\Delta_0^2(\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2\}. \quad (4.28)$$

E con $\Theta_0 = \frac{\xi_0\beta}{2}$ l'argomento della tangente iperbolica. Dopo alcuni passaggi algebrici si arriva alle seguenti espressioni:

C11

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{g}{2} \frac{1}{\mathcal{D}} \frac{\Delta_0^2}{2E_0^3} \{4(\hbar\omega)^2 E_0^2 - 4\xi_0^2(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2 + (\hbar\omega)^2(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2\} \operatorname{tgh} \Theta_0 \\ &\quad + \frac{g}{2} \frac{1}{\mathcal{D}} \frac{\xi_0^2}{4E_0^2} \{(\hbar\omega)^2(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2 - 4\xi_0^2(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2\} \frac{(1 - \operatorname{tgh}^2 \Theta_0)}{T} \\ C_{11} &\xrightarrow{T \rightarrow 0} \frac{g}{2} \frac{1}{\mathcal{D}} \frac{\Delta_0^2}{2E_0^3} \{4(\hbar\omega)^2 E_0^2 - 4\xi_0^2(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2 + (\hbar\omega)^2(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2\} \\ C_{11} &\xrightarrow{\Delta_0 \rightarrow 0} \frac{(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2}{4\{(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2\}} \frac{g(1 - \operatorname{tgh}^2[\frac{\xi_0\beta}{2}])}{T}. \end{aligned}$$

C12

$$\begin{aligned} C_{12} &= -\frac{1}{\mathcal{D}} \frac{\Delta_0 \xi_0}{2E_0^3} \{(\hbar\omega)^2(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2 - 4\xi_0^2(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2 + 4E_0^2(\hbar\omega)^2\} \operatorname{tgh} \Theta_0 \\ &\quad + \frac{1}{\mathcal{D}} \frac{\Delta_0 \xi_0}{4E_0^2} [(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2](\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2 \frac{(1 - \operatorname{tgh}^2 \Theta_0)}{T} \\ C_{12} &\xrightarrow{T \rightarrow 0} -\frac{1}{\mathcal{D}} \frac{\Delta_0 \xi_0}{2E_0^3} \{(\hbar\omega)^2(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2 - 4\xi_0^2(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2 + 4E_0^2(\hbar\omega)^2\} \\ C_{12} &\xrightarrow{\Delta_0 \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

C13

$$\begin{aligned} C_{13} &= -i(\hbar\omega)^3 \frac{\Delta_0}{E_0} \frac{1}{\mathcal{D}} \operatorname{tgh} \Theta_0 \\ C_{13} &\xrightarrow{T \rightarrow 0} -i(\hbar\omega)^3 \frac{\Delta_0}{E_0} \frac{1}{\mathcal{D}} \\ C_{13} &\xrightarrow{\Delta_0 \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

C21

$$\begin{aligned} C_{21} &= \frac{1}{\mathcal{D}} \frac{2\xi_0 \Delta_0}{E_0^3} \{(\hbar\omega)^2 E_0^2 - (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2 \xi_0^2\} \frac{g}{2} \operatorname{tgh} \Theta_0 + \frac{1}{\mathcal{D}} \frac{\xi_0^3 \Delta_0}{E_0^2} (\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2 \frac{g(1 - \operatorname{tgh}^2 \Theta_0)}{2T} \\ C_{21} &\xrightarrow{T \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{D}} \frac{2\xi_0 \Delta_0}{E_0^3} \{(\hbar\omega)^2 E_0^2 - (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2 \xi_0^2\} \frac{g}{2} \\ C_{21} &\xrightarrow{\Delta_0 \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

C22

$$\begin{aligned}
 C_{22} &= -\frac{1}{\mathcal{D}} \frac{2\xi_0^2}{E_0^3} \{-\xi_0^2(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2 + E_0^2(\hbar\omega)^2\} \operatorname{tgh} \Theta_0 + \frac{1}{\mathcal{D}} \frac{\xi_0^2}{E_0^2} \left\{ \Delta_0^2 (\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2 \frac{(1 - \operatorname{tgh}^2 \Theta_0)}{T} \right\} \\
 C_{22} &\xrightarrow{T \rightarrow 0} -\frac{1}{\mathcal{D}} \frac{2\xi_0^2}{E_0^3} \{-\xi_0^2(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2 + E_0^2(\hbar\omega)^2\} \\
 C_{22} &\xrightarrow{\Delta_0 \rightarrow 0} -\frac{-\xi_0^2(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2 + \xi_0^2(\hbar\omega)^2}{[(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2][(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2]} \frac{2\xi_0^2}{\xi_0^3} \operatorname{tgh} \left[\frac{\xi_0\beta}{2} \right] = -\frac{2\xi_0}{(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2} \operatorname{tgh} \left[\frac{\xi_0\beta}{2} \right].
 \end{aligned}$$

C23

$$\begin{aligned}
 C_{23} &= \frac{1}{\mathcal{D}} i(\hbar\omega) \frac{\xi_0}{E_0} \{-(\hbar\omega)^2 + (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2\} \operatorname{tgh} \Theta_0 \\
 C_{23} &\xrightarrow{T \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{D}} i(\hbar\omega) \frac{\xi_0}{E_0} \{-(\hbar\omega)^2 + (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2\} \\
 C_{23} &\xrightarrow{\Delta_0 \rightarrow 0} \frac{i(\hbar\omega) \frac{\xi_0}{E_0} [-(\hbar\omega)^2 + (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2]}{[(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2][(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2]} \operatorname{tgh} \left[\frac{\xi_0\beta}{2} \right] = -\frac{i(\hbar\omega)}{(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2} \operatorname{tgh} \left[\frac{\xi_0\beta}{2} \right].
 \end{aligned}$$

C31

$$\begin{aligned}
 C_{31} &= -\frac{2i(\hbar\omega)}{\mathcal{D}} \frac{\Delta_0}{2E_0^3} \{(\hbar\omega)^2 E_0^2 - (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2 \xi_0^2\} \frac{g}{2} \operatorname{tgh} \Theta_0 \\
 &\quad - \frac{g}{2} \frac{i(\hbar\omega)}{\mathcal{D}} \frac{\Delta_0 (\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2 \xi_0^2 (1 - \operatorname{tgh}^2 \Theta_0)}{2E_0^2 T} \\
 C_{31} &\xrightarrow{T \rightarrow 0} -\frac{2i(\hbar\omega)}{\mathcal{D}} \frac{\Delta_0}{2E_0^3} \{(\hbar\omega)^2 E_0^2 - (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2 \xi_0^2\} \frac{g}{2} \\
 C_{31} &\xrightarrow{\Delta_0 \rightarrow 0} 0.
 \end{aligned}$$

C32

$$\begin{aligned}
 C_{32} &= \frac{i(\hbar\omega)}{\mathcal{D}} \frac{\xi_0}{E_0^3} \{(\hbar\omega)^2 E_0^2 - \xi_0^2(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2\} \operatorname{tgh} \Theta_0 - \frac{i(\hbar\omega)}{\mathcal{D}} \frac{\xi_0 \Delta_0^2 (\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2 (1 - \operatorname{tgh}^2 \Theta_0)}{2E_0^2 T} \\
 C_{32} &\xrightarrow{T \rightarrow 0} \frac{i(\hbar\omega)}{\mathcal{D}} \frac{\xi_0}{E_0^3} \{(\hbar\omega)^2 E_0^2 - \xi_0^2(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2\} \\
 C_{32} &\xrightarrow{\Delta_0 \rightarrow 0} \frac{i(\hbar\omega) \{(\hbar\omega)^2 \xi_0^2 - \xi_0^2(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2\}}{[(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2][(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2]} \frac{\xi_0}{\xi_0^3} \operatorname{tgh} \left[\frac{\xi_0\beta}{2} \right] = \frac{i(\hbar\omega)}{(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2} \operatorname{tgh} \left[\frac{\xi_0\beta}{2} \right].
 \end{aligned}$$

C33

$$\begin{aligned}
 C_{33} &= -\frac{2}{\mathcal{D}} \frac{1}{E_0} \{E_0^2(\hbar\omega)^2 - \xi_0^2(\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2\} \operatorname{tgh} \Theta_0 \\
 C_{33} &\xrightarrow{T \rightarrow 0} -\frac{2}{\mathcal{D}} \frac{1}{E_0} \{E_0^2(\hbar\omega)^2 - \xi_0^2(\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2\} \\
 C_{33} &\xrightarrow{\Delta_0 \rightarrow 0} -\frac{2\{\xi_0^2(\hbar\omega)^2 - \xi_0^2(\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2\}}{[(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2][(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2]} \frac{1}{\xi_0} \operatorname{tgh} \left[\frac{\xi_0\beta}{2} \right] = -\frac{2\xi_0}{(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2} \operatorname{tgh} \left[\frac{\xi_0\beta}{2} \right].
 \end{aligned}$$

Analizzando con più cura il limite $\Delta_0 \rightarrow 0$, per vedere se anche in questo caso ci sono alcuni integrali b_{ij} che non convergono per $\mathbf{k} \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}
 C_{11} &\rightarrow \frac{(\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2}{4\{(\hbar\omega)^2 - (\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2\}} \frac{g(1 - \operatorname{tgh}^2 \left[\frac{\xi_0\beta}{2} \right])}{2T} \\
 C_{22} &\rightarrow -\frac{2\xi_0}{(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2} \operatorname{tgh} \left[\frac{\xi_0\beta}{2} \right] \propto \frac{1}{2\varepsilon} \\
 C_{23} &\rightarrow -\frac{i(\hbar\omega)}{(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2} \operatorname{tgh} \left[\frac{\xi_0\beta}{2} \right] \propto \frac{i\hbar\omega}{4\varepsilon^2} \\
 C_{32} &\rightarrow \frac{i(\hbar\omega)}{(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2} \operatorname{tgh} \left[\frac{\xi_0\beta}{2} \right] \propto -\frac{i\hbar\omega}{4\varepsilon^2} \\
 C_{33} &\rightarrow -\frac{2\xi_0}{(\hbar\omega)^2 - 4\xi_0^2} \operatorname{tgh} \left[\frac{\xi_0\beta}{2} \right] \propto \frac{1}{2\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

Dunque il formalismo si porta ad avere per alcuni integrali un contributo non nullo anche se il numero delle particelle va a zero, infatti nel vuoto abbiamo $\Delta = 0$, $\mu = 0$, per cui la relazione di dispersione è solo di particella libera. Seguiamo questa ricetta: se non c'è materia non ci sono le onde $\omega = 0$, per cui si deve togliere a mano questo contributo non nullo. Questa volta conviene normalizzare il valore degli integrali esprimendo per comodità la costante di accoppiamento g mediante la lunghezza di scattering a_s , e togliendo alle funzioni integrande il contributo che si otterrebbe nel vuoto².

Prima di continuare verifico che stiamo lavorando con le equazioni corrette. Per $\Delta_0 \rightarrow 0$ otteniamo l'equazione cinetica di Vlasov [62]. Si vede che è necessario avere f_{od} diversa da zero. Dall'equazione (4.14b) si ha che f_{od} dipende solo da f_{ev} , sostituisco l'espressione trovata:

$$\begin{aligned}
 f_{od} &= \frac{\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{\hbar\omega} \{C_{11}\delta\rho + C_{12}\sigma_{\Re} + C_{13}\sigma_{\Im}\} - \frac{\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{\hbar\omega} \partial_{\xi} F_0 \frac{g}{2} \delta\rho + \frac{\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{\hbar\omega} \partial_{\xi} D_0 \sigma_{\Re} \\
 &= \frac{\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{\hbar\omega} \left(C_{11} - \partial_{\xi} F_0 \frac{g}{2} \right) \delta\rho + \frac{\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{\hbar\omega} (C_{12} + \partial_{\xi} D_0) \sigma_{\Re} + \frac{\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{\hbar\omega} C_{13} \sigma_{\Im}
 \end{aligned}$$

Riconsidero la fluttuazione della trasformata di Wigner nel suo insieme $f = f_{od} + f_{ev}$

$$f = \left[C_{11} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q} + \omega}{\omega} \right) - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{\omega} \partial_{\xi} F_0 \frac{g}{2} \right] \delta\rho + \left[C_{12} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q} + \omega}{\omega} \right) + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{\omega} \partial_{\xi} D_0 \right] \sigma_{\Re} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{\omega} C_{13} \sigma_{\Im}$$

Adesso faccio il limite $\Delta_0 \rightarrow 0$, non in senso matematico ma nel senso che posso trascurare le densità anomale:

$$f \simeq \left[C_{11} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q} + \omega}{\omega} \right) - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{\omega} \partial_{\xi} F_0 \frac{g}{2} \right] \delta\rho$$

²Questa ricetta è simile a quella per sanare le divergenze nel caso all'equilibrio termodinamico, dove è stato introdotto lo pseudopotenziale

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2}{4\{\omega^2 - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2\}} \frac{g(1 - \tanh^2 \Theta_0)}{2T} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q} + \omega}{\omega} \right) + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{\omega} \frac{(1 - \tanh^2 \Theta_0)g}{4T} \frac{g}{2} \right] \delta\rho \\
 &= \left[\frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2}{\omega^2 - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q} + \omega}{\omega} \right) + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{\omega} \right] \frac{1 - \tanh^2 \Theta_0}{4T} \frac{g}{2} \delta\rho \\
 &= \left[\frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2}{\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}} \frac{1}{\omega} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v})}{\omega} \right] \frac{1 - \tanh^2 \Theta_0}{4T} \frac{g}{2} \delta\rho \\
 &= \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}} \frac{1 - \tanh^2 \Theta_0}{4T} \frac{g}{2} \delta\rho \\
 &= -\frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})}{(\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{q})} \partial_\xi F_0 \frac{g}{2} \delta\rho.
 \end{aligned}$$

4.4 Calcolo dei poli di risonanza

Si cercano i valori di ω per cui si annulla il denominatore, da un punto di vista fisico rappresentano le frequenze di eccitazione del sistema:

$$\mathcal{D} = (\hbar\omega)^4 - [4E_0^2 + (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2](\hbar\omega)^2 + 4\xi_0^2(\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2 = 0.$$

Rispetto alla variabile ω è un'equazione di quarto grado, che ha queste radici.

$$\omega_1 = +\frac{1}{\sqrt{2}\hbar} \sqrt{4E_0^2 + (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2 + \sqrt{[4E_0^2 + (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2]^2 - 16\xi_0^2(\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2}} \quad (4.29)$$

$$\omega_2 = +\frac{1}{\sqrt{2}\hbar} \sqrt{4E_0^2 + (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2 - \sqrt{[4E_0^2 + (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2]^2 - 16\xi_0^2(\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2}} \quad (4.30)$$

$$\omega_3 = -\omega_1 \quad (4.31)$$

$$\omega_4 = -\omega_2. \quad (4.32)$$

Però siccome valgono

$$\begin{aligned}
 [4E_0^2 + \hbar^2\eta^2]^2 &> 16\xi_0^2\hbar^2\eta^2 \quad \forall \eta : \eta = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}) \\
 4E_0^2 + \hbar^2\eta^2 &> \sqrt{[4E_0^2 + \hbar^2\eta^2]^2 - 16\xi_0^2\hbar^2\eta^2} \quad \forall \eta : \eta = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}),
 \end{aligned}$$

sono tutte reali e tali che: $\omega_3 = -\omega_1$ $\omega_4 = -\omega_2$. Siccome valgono le maggiorazioni precedenti posso fare uno sviluppo nel rapporto $\frac{16\xi_0^2(\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2}{[4E_0^2 + (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2]^2}$, trovo:

$$\hbar\tilde{\omega}_1 \simeq \sqrt{4E_0^2 + (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2} - \frac{2\xi_0^2(\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2}{\sqrt{[4E_0^2 + (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2]^3}} \quad (4.33)$$

$$\hbar\tilde{\omega}_2 \simeq \frac{2\xi_0(\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})}{\sqrt{4E_0^2 + (\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})^2}} \simeq \frac{\xi_0(\hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})}{E_0}. \quad (4.34)$$

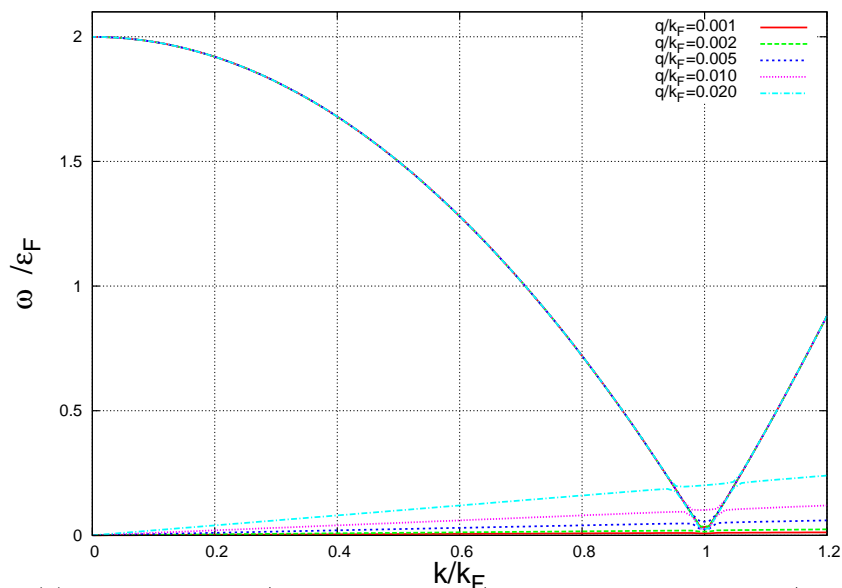
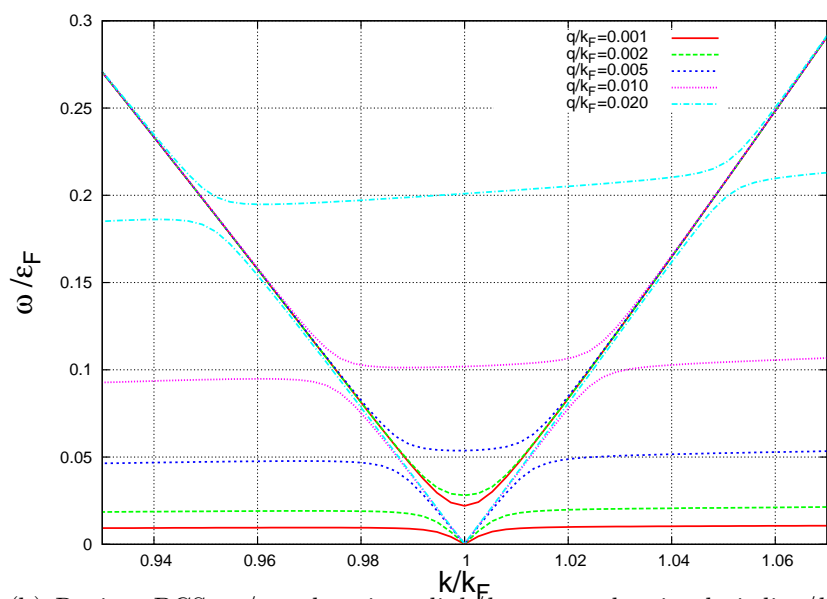

 (a) Regime BCS: ω/ε_F al variare di k/k_F , per alcuni valori di q/k_F

 (b) Regime BCS: ω/ε_F al variare di k/k_F , per alcuni valori di q/k_F , attorno alla superficie di Fermi

Figura 4.1: Poli di risonanza ω/ε_F al variare di k/k_F , per alcuni valori di q/k_F . Come si nota dalla figura (a) abbiamo due rami distinti: il ramo superiore corrisponde a ω_1 , quello inferiore a ω_2 . La figura (b) rappresenta un'ingrandimento della (a) attorno a $k/k_F = 1$.

Rispetto a un lavoro recente [49] fatto a temperatura zero troviamo, oltre al polo ω_1 legato alla rottura di una coppia di Cooper, un altro taglio, il polo ω_2 , corrispondente a stati virtuali intermedi relativi alla fluttuazione del campo medio. Il contributo

dato da questo polo non può essere escluso a questo livello, per cui è necessario un calcolo esplicito. In Fig. 4.1 ho riportato l'andamento dei poli al variare dell'impulso

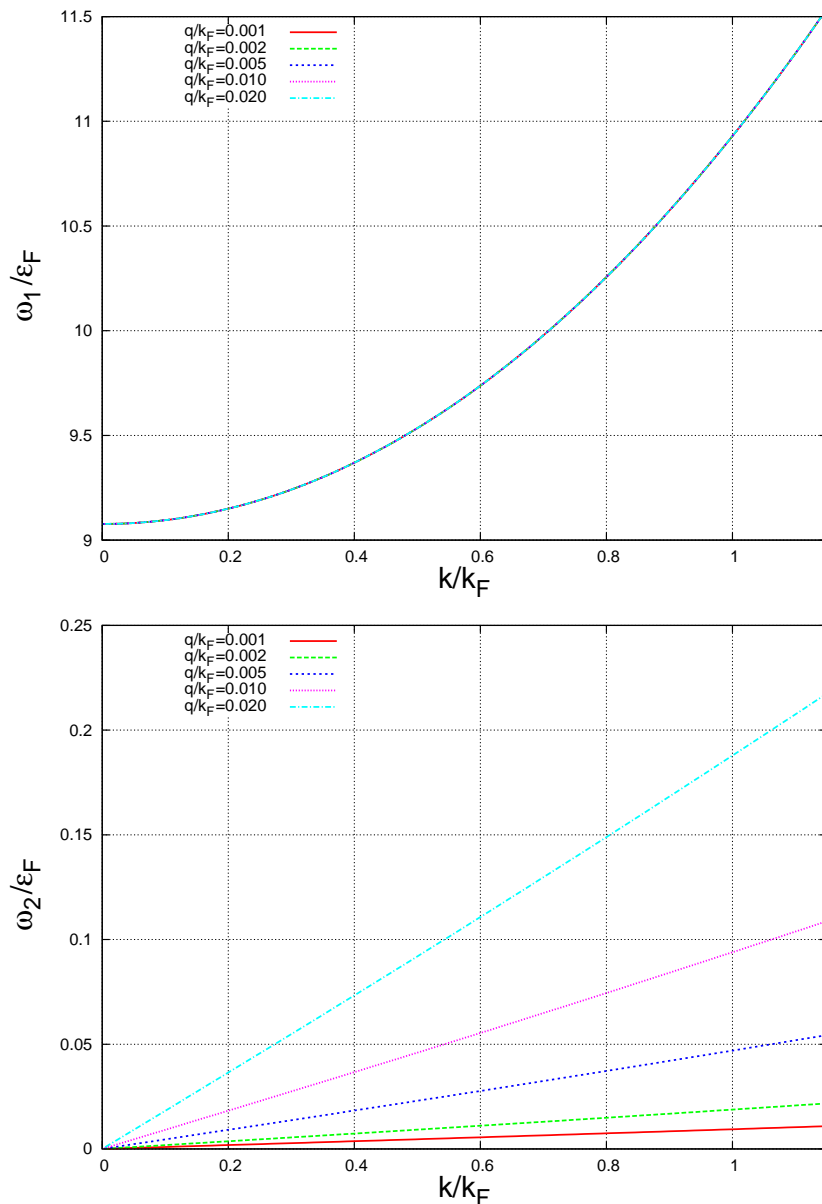


Figura 4.2: Regime BEC: poli di risonanza (ω_1 sopra, ω_2 sotto) al variare di k/k_F , per alcuni valori di q/k_F .

della particella, per alcuni valori del vettore d'onda del modo, relativamente a un regime BCS ($\bar{a} = -0.333$). La stessa cosa viene mostrata in un regime BEC, $\bar{a} = 0.5$ (vedi Fig. 4.2), e nel limite unitario (vedi Fig. 4.3). Tutti e tre i casi sono stati valutati nel limite di bassa temperatura ($\bar{T} = 0.001$).

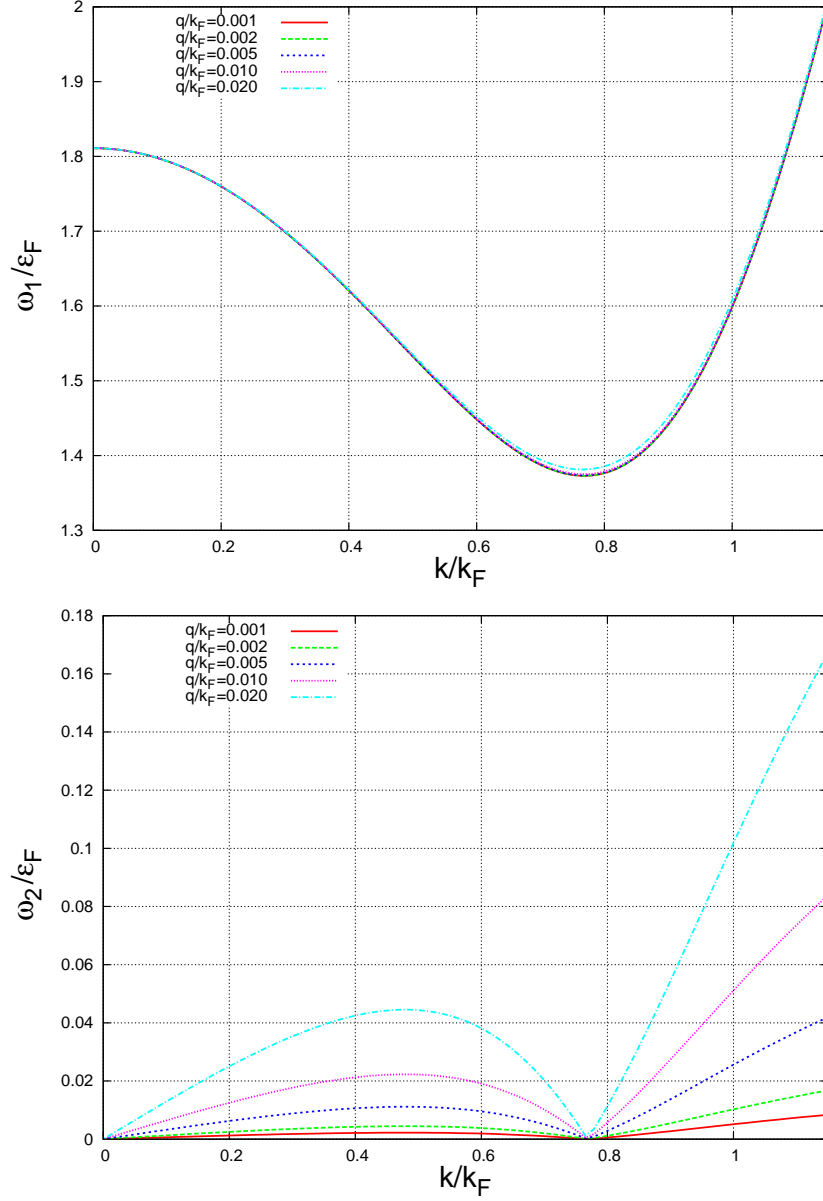


Figura 4.3: Limite unitario: andamento dei poli di risonanza (ω_1 sopra, ω_2 sotto) al variare di k/k_F , per alcuni valori di q/k_F .

4.5 Calcoli finali

Possiamo portare avanti il calcolo analitico facendo in maniera esplicita l'integrazione sugli angoli tra l'impulso della particella \mathbf{p} e il vettore d'onda \mathbf{q} del modo. Metto in evidenza la dipendenza dall'angolo nel denominatore

$$\mathcal{D} = [4\xi_0^2 - (\hbar\omega)^2](\hbar v q \cos \theta)^2 - [4E_0^2 - (\hbar\omega)^2](\hbar\omega)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= (\xi^* \hbar v q \cos \theta)^2 - (E^* \hbar \omega)^2 \\
 &= \mathcal{A} \cos^2 \theta - \mathcal{B},
 \end{aligned}$$

dove θ è l'angolo tra l'impulso della particella e il vettore d'onda del modo, \mathcal{A} sono i termini che moltiplicano il coseno quadrato dell'angolo \mathcal{B} raggruppa i termini rimanenti, e ho introdotto la notazione:

$$E^* = \sqrt{4E_0^2 - \hbar^2 \omega^2} \quad \xi^* = \sqrt{4\xi_0^2 - \hbar^2 \omega^2}$$

Scomponendo i coefficienti C_{ij} termine a termine ci si convince che gli integrali da fare sono in sostanza di due tipi:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 du C_{ij}^{(k)}(p, q, u, \omega) &= G_{ij}^{(k)}(p, q, \omega) \int_{-1}^1 du \frac{(\hbar \omega)^2}{\mathcal{D}} = (\hbar \omega)^2 G_{ij}^{(k)}(p, q, \omega) \int_{-1}^1 du \frac{1}{\mathcal{A}u^2 - \mathcal{B}} \\
 \int_{-1}^1 du C_{ij}^{(k)}(p, q, u, \omega) &= G_{ij}^{(k)}(p, q, \omega) \int_{-1}^1 du \frac{(\hbar v q u)^2}{\mathcal{D}} = (\hbar v q)^2 G_{ij}^{(k)}(p, q, \omega) \int_{-1}^1 du \frac{u^2}{\mathcal{A}u^2 - \mathcal{B}},
 \end{aligned}$$

dove con l'apice (k) sto indicando il termine k -esimo della scomposizione. Gli integrali si possono risolvere analiticamente:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 du \frac{1}{\mathcal{A}u^2 - \mathcal{B}} &= \frac{\tilde{f}(\mathcal{A}, \mathcal{B})}{\sqrt{\mathcal{A}}\sqrt{\mathcal{B}}}. \\
 \int_{-1}^1 du \frac{u^2}{\mathcal{A}u^2 - \mathcal{B}} &= \frac{2}{\mathcal{A}} + \frac{\sqrt{\mathcal{B}}}{\mathcal{A}\sqrt{\mathcal{A}}} \tilde{f}(\mathcal{A}, \mathcal{B}).
 \end{aligned}$$

in cui,

$$\tilde{f}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = -2 \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{\mathcal{A}}}{\sqrt{\mathcal{B}}} \right) = \ln \left(\frac{\sqrt{\mathcal{B}} - \sqrt{\mathcal{A}}}{\sqrt{\mathcal{B}} + \sqrt{\mathcal{A}}} \right) = \ln \left(\frac{E^* \hbar \omega - \xi^* \hbar v q}{E^* \hbar \omega + \xi^* \hbar v q} \right) = \ln \Xi.$$

Anche in questo caso si passa alle quantità adimensionali, indicate con una barra:

$$\begin{aligned}
 \hbar v q &= 2\varepsilon_F \bar{q} \bar{k} & \bar{\Theta} &= \frac{E_0}{2T} \\
 \sqrt{\mathcal{A}} &= \xi^* \hbar v q = 2\varepsilon_F^2 (\bar{q} \bar{k}) \bar{\xi}^* = 2\varepsilon_F^2 \sqrt{\bar{\mathcal{A}}} \\
 \sqrt{\mathcal{B}} &= E^* \hbar \omega = \varepsilon_F^2 \bar{\omega} \sqrt{4E_0^2 - \bar{\omega}^2} = \varepsilon_F^2 \bar{\omega} \bar{E}^* = \varepsilon_F^2 \sqrt{\bar{\mathcal{B}}} \\
 \Xi &= \frac{E^* \hbar \omega - \xi^* \hbar v q}{E^* \hbar \omega + \xi^* \hbar v q} = \frac{\bar{E}^* \bar{\omega} - 2\bar{\xi}^* \bar{k} \bar{q}}{\bar{E}^* \bar{\omega} + 2\bar{\xi}^* \bar{k} \bar{q}} \equiv \bar{\Xi}
 \end{aligned}$$

Per cui si ottengono questi integrali. Da notare che gli integrali non convergenti che sono stati “curati” con la prescrizione descritta sopra vengono indicati con l’apice \mathfrak{n} , e.a. $gb_{22}^{\mathfrak{n}}$.

$$gb_{11} = \frac{2}{\pi} \bar{a} \int_0^\infty \bar{k}^2 d\bar{k} \left\{ -\frac{\bar{\Delta}^2}{2\bar{E}_k^3} \operatorname{tgh} \bar{\Theta} + \frac{\bar{\omega}^2 \bar{\Delta}^2}{4\bar{E}_k^3} \operatorname{tgh} \bar{\Theta} \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{1}{\bar{E}^* \bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} \right. \\ \left. - \frac{\bar{\xi}_k^2}{8\bar{E}_k^2} \left(2 + \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{\bar{E}^*}{\bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} \right) \frac{1 - \operatorname{tgh}^2 \bar{\Theta}}{\bar{T}} \right\} \quad (4.35)$$

$$gb_{12} = \frac{2}{\pi} \bar{a} \int_0^\infty \bar{k}^2 d\bar{k} \left\{ \frac{\bar{\Delta} \bar{\xi}_k}{\bar{E}_k^3} \operatorname{tgh} \bar{\Theta} - \frac{\bar{\omega}^2 \bar{\Delta} \bar{\xi}_k}{2\bar{E}_k^3} \operatorname{tgh} \bar{\Theta} \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{1}{\bar{E}^* \bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} \right. \\ \left. - \frac{\bar{\xi}_k \bar{\Delta}}{4\bar{E}_k^2} \left(2 + \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{\bar{E}^*}{\bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} \right) \frac{1 - \operatorname{tgh}^2 \bar{\Theta}}{\bar{T}} \right\} \quad (4.36)$$

$$gb_{13} = \frac{2}{\pi} \bar{a} \int_0^\infty \bar{k}^2 d\bar{k} (-i\bar{\omega}) \frac{\bar{\Delta}}{\bar{E}_k} \operatorname{tgh} \bar{\Theta} \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{1}{\bar{E}^* \bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} \quad (4.37)$$

$$gb_{21} = \frac{2}{\pi} \bar{a} \int_0^\infty \bar{k}^2 d\bar{k} \bar{\xi}_k \left\{ \frac{\bar{\Delta}}{\bar{E}_k} \operatorname{tgh} \bar{\Theta} \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{1}{\bar{E}^* \bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} - \frac{\bar{\Delta} \bar{\xi}_k^2}{\bar{E}_k^3} \operatorname{tgh} \bar{\Theta} \left(2 + \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{\bar{E}^*}{\bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} \right) \frac{1}{\bar{\xi}^{*2}} \right. \\ \left. + \frac{\bar{\Delta} \bar{\xi}_k^2}{2\bar{E}_k^2} \left(2 + \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{\bar{E}^*}{\bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} \right) \frac{1}{\bar{\xi}^{*2}} \frac{1 - \operatorname{tgh}^2 \bar{\Theta}}{\bar{T}} \right\} \quad (4.38)$$

$$gb_{22}^{\mathfrak{n}} = \frac{2}{\pi} \bar{a} \int_0^\infty \bar{k}^2 d\bar{k} \left[2\bar{\xi}_k \left(-\frac{\bar{\xi}_k}{\bar{E}_k} \operatorname{tgh} \bar{\Theta} \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{1}{\bar{E}^* \bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} + \frac{\bar{\xi}_k^3}{\bar{E}_k^3} \operatorname{tgh} \bar{\Theta} \left(2 + \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{\bar{E}^*}{\bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} \right) \frac{1}{\bar{\xi}^{*2}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\bar{\xi}_k \bar{\Delta}^2}{2\bar{E}_k^2} \frac{1 - \operatorname{tgh}^2 \bar{\Theta}}{\bar{T}} \left(2 + \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{\bar{E}^*}{\bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} \right) \frac{1}{\bar{\xi}^{*2}} \right) - \frac{1}{\bar{k}^2} \right] \quad (4.39)$$

$$gb_{23} = \frac{2}{\pi} \bar{a} \int_0^\infty \bar{k}^2 d\bar{k} \left[i\bar{\omega} \frac{\bar{\xi}_k}{\bar{E}_k} \left(-\frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{1}{\bar{E}^* \bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} + \left(2 + \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{\bar{E}^*}{\bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} \right) \frac{1}{\bar{\xi}^{*2}} \right) \operatorname{tgh} \bar{\Theta} \right] \quad (4.40)$$

$$\tilde{gb}_{31} = \frac{2}{\pi} \bar{a} \int_0^\infty \bar{k}^2 d\bar{k} \left(-\frac{i\bar{\omega}}{2} \right) \left\{ \frac{\bar{\Delta}}{\bar{E}_k} \operatorname{tgh} \bar{\Theta} \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{1}{\bar{E}^* \bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} - \frac{\bar{\Delta} \bar{\xi}_k^2}{\bar{E}_k^3} \operatorname{tgh} \bar{\Theta} \left(2 + \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{\bar{E}^*}{\bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} \right) \frac{1}{\bar{\xi}^{*2}} \right.$$

$$+ \frac{\bar{\Delta}\bar{\xi}_k^2}{2\bar{E}_k^2} \left(2 + \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{\bar{E}^*}{\bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} \right) \frac{1}{\bar{\xi}^{*2}} \frac{1 - \operatorname{tgh}^2 \bar{\Theta}}{\bar{T}} \} \quad (4.41)$$

$$gb_{32} = \frac{2}{\pi} \bar{a} \int_0^\infty \bar{k}^2 d\bar{k} \left[i\bar{\omega} \left(\frac{\bar{\xi}_k}{\bar{E}_k} \operatorname{tgh} \bar{\Theta} \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{1}{\bar{E}^* \bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} - \frac{\bar{\xi}_k^3}{\bar{E}_k^3} \operatorname{tgh} \bar{\Theta} \left(2 + \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{\bar{E}^*}{\bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} \right) \frac{1}{\bar{\xi}^{*2}} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\bar{\xi}_k \bar{\Delta}^2}{2\bar{E}_k^2} \left(2 + \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{\bar{E}^*}{\bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} \right) \frac{1}{\bar{\xi}^{*2}} \frac{1 - \operatorname{tgh}^2 \bar{\Theta}}{\bar{T}} \right) \right] \quad (4.42)$$

$$gb_{33}^{\text{A}} = \frac{2}{\pi} \bar{a} \int_0^\infty \bar{k}^2 d\bar{k} \left[\left(-2\bar{E}_k \operatorname{tgh} \bar{\Theta} \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{1}{\bar{E}^* \bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} + 2 \frac{\bar{\xi}_k^2}{\bar{E}_k} \operatorname{tgh} \bar{\Theta} \left(2 + \frac{\bar{\omega}}{2\bar{q}\bar{k}} \frac{\bar{E}^*}{\bar{\xi}^*} \ln \bar{\Xi} \right) \frac{1}{\bar{\xi}^{*2}} \right) - \frac{1}{\bar{k}^2} \right] \quad (4.43)$$

Conclusioni

In questo lavoro di tesi abbiamo studiato le proprietà di un gas di fermioni interagenti nel *crossover* BCS-BEC, a temperatura finita. Sperimentalmente lo studio di questa transizione fra un sistema di fermioni interagenti, in cui si creano coppie fortemente correlate, e un condensato di molecole biatomiche, è reso possibile grazie alle risonanze di Fano-Feshbach. Con queste si riesce a controllare l'ampiezza di *scattering*, parametro che, per un gas diluito a basse temperature, fornisce una ragionevole interazione efficace tra le particelle. Abbiamo ricordato l'importanza delle interazioni per sistema di fermioni.

Abbiamo analizzato a livello teorico questo sistema in approssimazione semiclassica mediante le evoluzioni temporali delle trasformate di Wigner della densità normale e anomala. Con lo stesso formalismo abbiamo studiato per un sistema di fermioni con *spin* $1/2$ nel limite termodinamico, aspetti di equilibrio termodinamico e aspetti dinamici. Abbiamo visto che il sistema di equazioni accoppiate nel primo caso portano direttamente all'equazione del *gap*. Quest'ultima accoppiata con la relazione tra densità ρ e potenziale chimico definisce in maniera univoca i parametri che caratterizzano lo stato macroscopico e microscopico del sistema durante tutto il *crossover*. Analizzando il modo collettivo di suono isothermico abbiamo notato l'importanza nella trattazione del problema del termine di campo medio di Hartree-Fock, che al nostro livello di indagine non può essere trascurato. Per ricavare le relazioni di dispersioni del sistema è sufficiente un approccio lineare: per questo lo studio del sistema fuori dall'equilibrio termodinamico è stato fatto nel regime delle piccole fluttuazioni.

Sviluppi possibili di questo lavoro, oltre a calcolare esplicitamente le frequenze dei modi collettivi del sistema, sono: analizzare la risposta lineare del sistema all'azione di un campo esterno, studiare un gas di fermioni in configurazioni fisiche più realistiche, ad esempio un gas intrappolato in una buca di potenziale armonico o in potenziali più vicini a quelli comunemente realizzati in laboratorio.

Bibliografia

- [1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Weiman, and E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
- [2] K. B. Davis *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [3] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollet, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
- [4] D. S. Jin, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 420 (1996).
- [5] M. R. Matthews *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2498 (1999).
- [6] B. DeMarco and D. S. Jin, *Science* **285**, 1703 (1999).
- [7] G. Roati, F. Riboli, G. Modugno, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 150403 (2002).
- [8] F. Ferlaino *et al.*, *Phys. Rev. A* **73**, 040702 (2006), *Errata corrige*: F. Ferlaino *et al.*, *Phys. Rev. A*, **74**, 039903(E) (2006).
- [9] C. D'Errico, *Osservazione di Risonanze di Fano-Feshbach in miscele atomiche K-Rb* (Tesi di laurea, Università degli Studi di Firenze, 2005).
- [10] C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, *Nature* **424**, 47 (2003).
- [11] M. Greiner, C. A. Regal, and D. S. Jin, *Nature* **426**, 537 (2003).
- [12] M. W. Zwierlein *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 250401 (2003).
- [13] L. Fallani *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 140406 (2004).
- [14] U. Fano, *Phys. Rev.* **124**, 1866 (1961).
- [15] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).

- [16] L. N. Cooper, Phys. Rev. **104**, 1189 (1956).
- [17] T. Bourdel *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 050401 (2004).
- [18] T. Bourdel *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 020402 (2003).
- [19] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1977).
- [20] D. L. Goodstein, *States of Matter* (Dover Publications, New York, 1985).
- [21] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [22] H. Feshbach, Ann. Phys. (N.Y) **19**, 287 (1962).
- [23] S. L. Cornish, N. R. Claussen, J. L. Roberts, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **85**, 1795 (2000).
- [24] T. Loftus, C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **88**, 173201 (2002).
- [25] J. L. Roberts *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86**, 4211 (2001).
- [26] K. Xu *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 210402 (2003).
- [27] S. Inouye *et al.*, Nature **392**, 151 (1998).
- [28] J. Herbig *et al.*, Science **301**, 1510 (2003).
- [29] K. E. Strecker, G. B. Partridge, and R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **91**, 080406 (2003).
- [30] J. Cubizolles, T. Bourdel, S. J. J. M. F. Kokkelmans, G. V. Shlyapnikov, and C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **91**, 240401 (2003).
- [31] S. Jochim *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 240402 (2003).
- [32] S. Jochim *et al.*, Science **302**, 2101 (2003).
- [33] M. Holland, S. J. J. M. F. Kokkelmans, M. L. Chiofalo, and R. Walser, Phys. Rev. Lett. **87**, 120406 (2001).

- [34] M. L. Chiofalo, S. J. J. M. F. Kokkelmans, J. N. Milstein, and M. Holland, Phys. Rev. Lett. **88**, 090402 (2002).
- [35] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **92**, 040403 (2004).
- [36] M. W. Zwierlein *et al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 120403 (2004).
- [37] C. Chin *et al.*, Science **305**, 1128 (2004).
- [38] M. W. Zwierlein, J. R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C. H. Schunck, and W. Ketterle, Nature **435**, 1047 (2005).
- [39] C. A. Stan, M. W. Zwierlein, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **93**, 143001 (2004).
- [40] A. J. Kerman, J. M. Sage, S. Sainis, T. Bergeman, and D. DeMille, Phys. Rev. Lett. **92**, 033004 (2004).
- [41] G. Modugno *et al.*, Science **297**, 2240 (2002).
- [42] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum theory of Many-Particle Systems* (McGraw-Hill, New York, 1971).
- [43] M. Urban and P. Schuck, Phys. Rev. A **73**, 013621 (2006).
- [44] E. P. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
- [45] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem* (Springer-Verlag, Berlino, 1980).
- [46] A. Dellafiore and F. Matera, Phys. Rev. C **44**, 2456 (1991).
- [47] F. Matera, G. Fabbri, and A. Dellafiore, Phys. Rev. C **56**, 228 (1997).
- [48] G. Baym and C. J. Pethick, *Landau Fermi-Liquid Theory: Concepts and Applications* (Wiley & Sons, New York, 1991).
- [49] R. Combescot, M. Y. Kagan, and S. Stringari, Phys. Rev. A **74**, 042717 (2006).
- [50] C. A. R. Sá de Melo, M. Randeira, and J. Engelbrecht, Phys. Rev. Lett. **71**, 3202 (1993).
- [51] J. R. Engelbrecht, M. Randeira, and C. A. R. Sá de Melo, Phys. Rev. B **55**, 15153 (1997).

- [52] N. N. Bogoliubov, *Nuovo Cimento* **7**, 794 (1958).
- [53] L. P. Gorkov, *Sov. Phys.-JETP* **7**, 505 (1958).
- [54] P. Pieri, L. Pisani, and G. C. Strinati, *Phys. Rev. B* **70**, 094508 (2004).
- [55] S. Y. Chang, V. R. Pandharipande, J. Carlson, and K. Schmidt, *Phys. Rev. A* **70**, 043602 (2004).
- [56] Y. Castin, arXiv:cond-mat/0612613v2 .
- [57] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization* (Springer-Verlag, Berlino, 1987).
- [58] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 77, The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [59] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, arXiv:0706.3360v1 .
- [60] V. Bargmann, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 488 (1949).
- [61] G. E. Astrakharchik, J. Boronat, J. Casulleras, and S. Giorgini, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 200404 (2004).
- [62] R. L. Liboff, *Kinetic Theory* (Wiley & Sons, New York, 1998).

Appendice A

Calcoli formali

A.1 Calcolo completo per l'evoluzione di $\hat{\psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}, t)$

Si lavora in rappresentazione di Heisenberg:

$$\hat{\psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}, t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) e^{-i\hat{H}t/\hbar}. \quad (\text{A.1})$$

Dunque i campi fermionici evolvono nel tempo secondo l'equazione,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}, t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} [\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{H}] e^{-i\hat{H}t/\hbar}. \quad (\text{A.2})$$

Si valuta in maniera esplicita il commutatore $[\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{H}]$. Per agevolare la lettura, le formule intermedie vengono calcolate in notazione compatta: si ha la somma su indici ripetuti, e l'integrazione implicita per le variabili "mute".

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{H}] &\propto \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) \hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{z}) T(\mathbf{z}) \hat{\psi}_\gamma(\mathbf{z}) - \hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{z}) T(\mathbf{z}) \hat{\psi}_\gamma(\mathbf{z}) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) \\ &+ \frac{1}{2} \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) \hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{y}) \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{z}) \langle \gamma\beta | V(\mathbf{z}, \mathbf{y}) | \gamma'\beta' \rangle \hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{z}) \hat{\psi}_{\gamma'}(\mathbf{y}) \\ &- \frac{1}{2} \hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{y}) \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{z}) \langle \gamma\beta | V(\mathbf{z}, \mathbf{y}) | \gamma'\beta' \rangle \hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{z}) \hat{\psi}_{\gamma'}(\mathbf{y}) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

In questa appendice analizzo i passi intermedi di questo calcolo. A causa delle regole di anticommutazione canoniche (2.5, 2.6), l'ordine in cui sono messi gli operatori acquista una certa importanza.

Riscrivo i termini a un corpo della (A.3),

$$\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) \hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{z}) T(\mathbf{z}) \hat{\psi}_\gamma(\mathbf{z}) - \hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{z}) T(\mathbf{z}) \hat{\psi}_\gamma(\mathbf{z}) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) = \quad (\text{A.4})$$

usando la (2.6),

$$= \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) \hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{z}) T(\mathbf{z}) \hat{\psi}_\gamma(\mathbf{z}) + \hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{z}) T(\mathbf{z}) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) \hat{\psi}_\gamma(\mathbf{z}) \quad (\text{A.5})$$

Ma l'operatore a un corpo $T(\mathbf{z})$ non agisce su $\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x})$:

$$= \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x})\hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{z})T(\mathbf{z})\hat{\psi}_\gamma(\mathbf{z}) + \hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{z})\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x})T(\mathbf{z})\hat{\psi}_\gamma(\mathbf{z}). \quad (\text{A.6})$$

Metto in evidenza un'anticommutazione:

$$= \delta_{\alpha,\gamma}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z})T(\mathbf{z})\hat{\psi}_\gamma(\mathbf{z}). \quad (\text{A.7})$$

Riscrivo i termini a due corpi della (A.3),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x})\hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{y})\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{z})\langle\gamma\beta|V(\mathbf{z}, \mathbf{y})|\gamma'\beta'\rangle\hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{z})\hat{\psi}_{\gamma'}(\mathbf{y}) \\ & - \frac{1}{2}\hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{y})\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{z})\langle\gamma\beta|V(\mathbf{z}, \mathbf{y})|\gamma'\beta'\rangle\hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{z})\hat{\psi}_{\gamma'}(\mathbf{y})\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

In questo caso la strategia consiste nel ricreare un anticommutatore tra $\hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{y})$ e $\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x})$; lavoro sul secondo addendo della (A.8),

$$- \frac{1}{2}\hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{y})\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{z})\langle\gamma\beta|V(\mathbf{z}, \mathbf{y})|\gamma'\beta'\rangle\hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{z})\hat{\psi}_{\gamma'}(\mathbf{y})\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) = \quad (\text{A.9})$$

$$= -\frac{1}{2}\hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{y})\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{z})\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x})\langle\gamma\beta|V(\mathbf{z}, \mathbf{y})|\gamma'\beta'\rangle\hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{z})\hat{\psi}_{\gamma'}(\mathbf{y}). \quad (\text{A.10})$$

Usando la (2.5) per i campi $\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{z})$, $\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x})$ diventa:

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{2}\hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{y})\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x})\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{z})\langle\gamma\beta|V(\mathbf{z}, \mathbf{y})|\gamma'\beta'\rangle\hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{z})\hat{\psi}_{\gamma'}(\mathbf{y}) \\ & - \frac{1}{2}\hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{y})\langle\gamma\alpha|V(\mathbf{x}, \mathbf{y})|\gamma'\beta'\rangle\hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{x})\hat{\psi}_{\gamma'}(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Unisco il primo addendo della (A.8) con la prima parte del risultato (A.11):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x})\hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{y})\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{z})\langle\gamma\beta|V(\mathbf{z}, \mathbf{y})|\gamma'\beta'\rangle\hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{z})\hat{\psi}_{\gamma'}(\mathbf{y}) \\ & + \frac{1}{2}\hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{y})\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x})\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{z})\langle\gamma\beta|V(\mathbf{z}, \mathbf{y})|\gamma'\beta'\rangle\hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{z})\hat{\psi}_{\gamma'}(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Raccolgo un anticommutatore:

$$= \frac{1}{2}(\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x})\hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{y}) + \hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{y})\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}))\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{z})\langle\gamma\beta|V(\mathbf{z}, \mathbf{y})|\gamma'\beta'\rangle\hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{z})\hat{\psi}_{\gamma'}(\mathbf{y}) \quad (\text{A.13})$$

$$= \frac{1}{2}\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{z})\langle\alpha\beta|V(\mathbf{z}, \mathbf{x})|\gamma'\beta'\rangle\hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{z})\hat{\psi}_{\gamma'}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.14})$$

Alla fine si ottiene per il termine a due corpi del commutatore l'espressione in forma compatta:

$$\frac{1}{2}\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{z})\langle\alpha\beta|V(\mathbf{z},\mathbf{x})|\gamma'\beta'\rangle\hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{z})\hat{\psi}_{\gamma'}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{y})\langle\gamma\alpha|V(\mathbf{x},\mathbf{y})|\gamma'\beta'\rangle\hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{x})\hat{\psi}_{\gamma'}(\mathbf{y}). \quad (\text{A.15})$$

Di solito per il potenziale si richiede che abbia almeno la simmetria di “scambio”:

$$\sum_{\beta}\langle\alpha\beta|V(\mathbf{z},\mathbf{x})|\gamma'\beta'\rangle = \sum_{\gamma}\langle\gamma\alpha|V(\mathbf{x},\mathbf{z})|\gamma'\beta'\rangle. \quad (\text{A.16})$$

Per cui facendo opportuni cambi di variabile si trova il risultato:

$$= 2\frac{1}{2}\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{z})\langle\alpha\beta|V(\mathbf{z},\mathbf{x})|\gamma'\beta'\rangle\hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{z})\hat{\psi}_{\gamma'}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.17})$$

Alla fine abbiamo trovato per il commutatore tra $\hat{\psi}$ e H , l'espressione esplicita:

$$[\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{H}] = T(\mathbf{x})\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) + \sum_{\beta',\gamma',\gamma}\int d\mathbf{z}\hat{\psi}_\gamma^\dagger(\mathbf{z})\langle\gamma\alpha|V(\mathbf{x},\mathbf{z})|\gamma'\beta'\rangle\hat{\psi}_{\gamma'}(\mathbf{z})\hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.18})$$

A.2 Proprietà funzioni di Wigner

In questa appendice mostro in maniera esplicita le proprietà di simmetria sulle variabili di *spin* per le trasformate di Wigner.

$$F_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{R} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}/\hbar} \langle: \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}_+, t) \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}_-, t) : \rangle$$

sostituzione $\mathbf{R} = -\mathbf{z}$

$$\begin{aligned} &= \int d\mathbf{z} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{z}/\hbar} \langle: \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}_-, t) \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}_+, t) : \rangle \\ &= F_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\bar{F}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}/\hbar} \langle: \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}_-, t) \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}_+, t) : \rangle$$

anticommuta

$$\begin{aligned} &= \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}/\hbar} \delta_{\alpha,\beta} \delta(\mathbf{R}) - \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}/\hbar} \langle: \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}_+, t) \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}_-, t) : \rangle \\ &= \delta_{\alpha,\beta} - \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}/\hbar} \langle: \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}_+, t) \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}_-, t) : \rangle \end{aligned}$$

Operando la sostituzione $\mathbf{R} = -\mathbf{z}$

$$= \delta_{\alpha,\beta} - \int d\mathbf{z} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}/\hbar} \langle : \hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x}_{-}, t) \hat{\psi}_{\beta}(\mathbf{x}_{+}, t) : \rangle$$

Via la sostituzione $\mathbf{p} = -\mathbf{k}$ si ottiene

$$\begin{aligned} &= \delta_{\alpha,\beta} - \int d\mathbf{z} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}/\hbar} \langle : \hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x}_{-}, t) \hat{\psi}_{\beta}(\mathbf{x}_{+}, t) : \rangle \\ &= \delta_{\alpha,\beta} - F_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = \delta_{\alpha,\beta} - F_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t). \end{aligned}$$

Per le trasformate di Wigner della matrice densità anomala si hanno le seguenti proprietà:

$$D_{\alpha,\beta}^*(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{R} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \langle : \hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x}_{+}, t) \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{x}_{-}, t) : \rangle$$

Se si fa la sostituzione $\mathbf{R} = -\mathbf{z}$

$$\begin{aligned} &= \int d\mathbf{z} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}/\hbar} \langle : \hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x}_{-}, t) \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{x}_{+}, t) : \rangle \\ &= \bar{D}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t). \end{aligned} \tag{A.20}$$

$$D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \langle : \hat{\psi}_{\beta}(\mathbf{x}_{-}, t) \hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{x}_{+}, t) : \rangle$$

anticommuta

$$= - \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}/\hbar} \langle : \hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{x}_{+}, t) \hat{\psi}_{\beta}(\mathbf{x}_{-}, t) : \rangle$$

Via la sostituzione $\mathbf{R} = -\mathbf{z}$ ottengo:

$$\begin{aligned} &= - \int d\mathbf{z} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}/\hbar} \langle : \hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{x}_{-}, t) \hat{\psi}_{\beta}(\mathbf{x}_{+}, t) : \rangle \\ &= -D_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t). \end{aligned} \tag{A.21}$$

Per matrici densità valgono queste proprietà che sono ricavabili direttamente dalla definizione:

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t) &= 1 - \rho_{\beta,\alpha}^*(\mathbf{x}, t) \\ \kappa_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t) &= -\kappa_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t) \\ \bar{\kappa}_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t) &= -\bar{\kappa}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

$$\kappa_{\alpha,\beta}^*(\mathbf{x}, t) = \bar{\kappa}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t).$$

Dalla ultima relazione e dalla (A.20) seguono:

$$\begin{aligned} (D_{\alpha,\beta}^*(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)) &= (\Re D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + i\Im D_{\alpha,\beta}^*(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)) \\ &= \Re D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - i\Im D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\ &= \Re \bar{D}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + i\Im \bar{D}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t). \end{aligned}$$

Da cui si ottengono questi legami tra parti reali e parti immaginarie:

$$\begin{aligned} \Re D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= \Re \bar{D}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\ \Im D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= -\Im \bar{D}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\ \Re \kappa_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t) &= \Re \bar{\kappa}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t) \\ \Im \kappa_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t) &= -\Im \bar{\kappa}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \tag{A.22}$$

E da queste seguono altre due proprietà non meno importanti:

$$\begin{aligned} \Re[\bar{D}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\kappa_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t)] &= \Re \bar{D}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\Re \kappa_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t) - \Im \bar{D}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\Im \kappa_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t) \\ &= \Re D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\Re \bar{\kappa}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t) + \Im D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)(-\Im \bar{\kappa}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t)) \\ &= \Re[D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\bar{\kappa}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Im[\bar{D}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\kappa_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t)] &= \Im \bar{D}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\Re \kappa_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t) - \Im \kappa_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t)\Re \bar{D}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\ &= -\Im D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\Re \bar{\kappa}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t) - \Im \bar{\kappa}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t)\Re D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\ &= -\Im[D_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\bar{\kappa}_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t)]. \end{aligned}$$

Appendice B

Potenziali

In questa appendice mostro che nel limite $R_0 \rightarrow 0$ il potenziale di tipo buca scelto nella tesi per regolarizzare il termine di Hartree-Fock si riduce al potenziale tipo delta.

$$V_\delta(\mathbf{k} = 0) = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{k}=0} = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{g}{2} \delta(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{k}=0} = \frac{g}{2} \quad (\text{B.1})$$

$$V_{HC}(\mathbf{k} = 0) = -\frac{4}{3}\pi R_0^3 V_0, \quad (\text{B.2})$$

si ipotizza che si conservi il valore dei due integrali.

$$-\frac{4}{3}\pi R_0^3 V_0 = \frac{g}{2} \Rightarrow -\bar{R}_0^3 \bar{V}_0 = 3\bar{a}, \quad (\text{B.3})$$

ovvero si sta dicendo che se $\bar{R}_0 \rightarrow 0$ allora $\bar{V}_0 \rightarrow \infty$ in modo che $\bar{R}_0^3 \bar{V}_0 \propto \text{cost.}$ Dunque si deve considerare il secondo ordine nello sviluppo della relazione (3.111):

$$1 - \frac{\tan x}{x} = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{15}x^4 + O(x^5), \quad (\text{B.4})$$

che porta direttamente all'espressione precedente (B.2):

$$\bar{a} = -\bar{R}_0 \left[\frac{1}{3} \left(\bar{R}_0 \sqrt{\bar{V}_0} \right)^2 \right], \quad (\text{B.5})$$

e quindi si ha anche:

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}_{HF}}{\partial \bar{\rho}} = -\frac{2}{3\pi} \bar{R}_0^3 \bar{V}_0 \xrightarrow{\bar{R}_0 \rightarrow 0} 2 \frac{3\bar{a}}{3\pi} = \frac{2}{\pi} \bar{a}. \quad (\text{B.6})$$

Vedo cosa succede nel limite unitario

$$\bar{a} \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \bar{R}_0 \sqrt{\bar{V}_0} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{\bar{V}_0} = \frac{\pi}{2\bar{R}_0} \Rightarrow \bar{V}_0 = \frac{\pi^2}{4\bar{R}_0^2}, \quad (\text{B.7})$$

e quindi il contributo di Hartree-Fock nel limite unitario dipende solo da \bar{R}_0

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}_{HF}}{\partial \bar{\rho}} = -\frac{2}{3\pi} \bar{R}_0^3 \bar{V}_0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{\epsilon}_{HF}}{\partial \bar{\rho}} = -\frac{\pi}{6} \bar{R}_0. \quad (\text{B.8})$$

Appendice C

Suono

In questa appendice si analizzano i tre integrali introdotti nel Capitolo 3. Partiamo dall'espressione:

$$c_s^2 = \frac{\rho}{m} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} = \frac{\rho}{m} \left(\frac{1}{\frac{\partial \rho}{\partial \mu^*} + \frac{\partial \rho}{\partial \Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \mu^*}} + \frac{g}{2} \right). \quad (\text{C.1})$$

Per semplicità si introduce la notazione: $\Theta = (\beta E/2)$. Riparto dall'equazione per la densità:

$$\rho(\mu^*, \Delta) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \left[1 - \frac{\xi}{E} \tanh \Theta \right]. \quad (\text{C.2})$$

Facendo le derivate si trova:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mu^*} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\xi^2 \beta}{2E^3} \left[\frac{2E^2}{\xi^2 \beta} \tanh \Theta - \frac{2}{\beta} \tanh \Theta + E - E \tanh^2 \Theta \right] \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \Delta} = - \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\xi \Delta \beta}{2E^3} \left[-\frac{2}{\beta} \tanh \Theta + E - E \tanh^2 \Theta \right]. \quad (\text{C.4})$$

Per il *gap* si riparte dall'espressione:

$$\frac{m}{4\pi\hbar^2 a_s} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \left[\frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}} - \frac{1}{2E} \tanh \Theta \right] \equiv I(\mu^*, \Delta). \quad (\text{C.5})$$

Facendone la variazione si ha:

$$0 = \frac{\partial I(\mu^*, \Delta)}{\partial \mu^*} d\mu^* + \frac{\partial I(\mu^*, \Delta)}{\partial \Delta} d\Delta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \mu^*} = - \frac{\frac{\partial I(\mu^*, \Delta)}{\partial \mu^*}}{\frac{\partial I(\mu^*, \Delta)}{\partial \Delta}}. \quad (\text{C.6})$$

Facendo le derivate si trova:

$$\frac{\partial I(\mu^*, \Delta)}{\partial \mu^*} = \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\xi \beta}{2E^3} \left[-\frac{2}{\beta} \tanh \Theta + E - E \tanh^2 \Theta \right] \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\partial I(\mu^*, \Delta)}{\partial \Delta} = \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\Delta\beta}{2E^3} \left[\frac{2}{\beta} \tanh \Theta + E \tanh^2 \Theta - E \right]. \quad (\text{C.8})$$

Passo anche in questo caso alle variabili adimensionali:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mu^*} = \frac{k_F^3}{2\pi^2 \varepsilon_F} \frac{1}{2\bar{T}} L_1[\bar{k}] \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \Delta} = \frac{k_F^3}{2\pi^2 \varepsilon_F} \frac{-\bar{\Delta}}{2\bar{T}} L_2[\bar{k}] \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{\partial I(\mu^*, \Delta)}{\partial \mu^*} = \frac{k_F^3}{2\pi^2 \varepsilon_F^2} \frac{1}{4\bar{T}} L_2[\bar{k}] \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{\partial I(\mu^*, \Delta)}{\partial \Delta} = \frac{k_F^3}{2\pi^2 \varepsilon_F^2} \frac{\bar{\Delta}}{4\bar{T}} L_3[\bar{k}]. \quad (\text{C.12})$$

In cui $L_1[\bar{k}]$, $L_2[\bar{k}]$, $L_3[\bar{k}]$ sono funzionali di funzioni dipendenti dalla grandezza adimensionale \bar{k} :

$$L_1[\bar{k}] = \int_0^\infty d\bar{k} \bar{k}^2 \frac{\bar{\xi}_{\bar{k}}^2}{E_{\bar{k}}^3} \left[\frac{2\bar{T} E_{\bar{k}}^2}{\bar{\xi}_{\bar{k}}^2} \tanh \Theta - 2\bar{T} \tanh \Theta + \bar{E}_{\bar{k}} - \bar{E}_{\bar{k}} \tanh^2 \Theta \right] \quad (\text{C.13})$$

$$L_2[\bar{k}] = \int_0^\infty d\bar{k} \bar{k}^2 \frac{\bar{\xi}_{\bar{k}}}{E_{\bar{k}}^3} \left[-2\bar{T} \tanh \Theta + \bar{E}_{\bar{k}} - \bar{E}_{\bar{k}} \tanh^2 \Theta \right] \quad (\text{C.14})$$

$$L_3[\bar{k}] = \int_0^\infty d\bar{k} \bar{k}^2 \frac{1}{E_{\bar{k}}^3} \left[2\bar{T} \tanh \Theta + \bar{E}_{\bar{k}} \tanh^2 \Theta - \bar{E}_{\bar{k}} \right]. \quad (\text{C.15})$$

Per cui la parte differenziale della velocità del suono diventa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mu^*} - \frac{\partial \rho}{\partial \Delta} \frac{\partial I(\mu^*, \Delta)}{\partial \mu^*} = \frac{k_F^3}{2\pi^2 \varepsilon_F} \left[\frac{1}{2\bar{T}} L_1[\bar{k}] + \frac{1}{2\bar{T}} \frac{(L_2[\bar{k}])^2}{L_3[\bar{k}]} \right] \quad (\text{C.16})$$

Siccome si sa scrivere la densità in funzione dell'impulso di Fermi, $\rho = \frac{k_F^3}{3\pi^2}$.

$$c_s^2 = \frac{1}{m} \frac{k_F^3}{3\pi^2} \frac{2\pi^2 \varepsilon_F}{k_F^3} \left[\frac{1}{\frac{1}{2\bar{T}} L_1[\bar{k}] + \frac{1}{2\bar{T}} \frac{(L_2[\bar{k}])^2}{L_3[\bar{k}]}} + \frac{k_F^3}{2\pi^2 \varepsilon_F} \frac{g}{2} \right] \quad (\text{C.17})$$

Se si esprime la costante di accoppiamento in termini della lunghezza di *scattering*, si ottiene il risultato:

$$= \frac{\hbar^2 k_F^2}{3m^2} \left[\frac{1}{\frac{1}{2\bar{T}} L_1[\bar{k}] + \frac{1}{2\bar{T}} \frac{(L_2[\bar{k}])^2}{L_3[\bar{k}]}} + \frac{k_F^3}{2\pi^2 \varepsilon_F} \frac{4\pi \hbar^2 a_s}{2m} \right] \quad (\text{C.18})$$

$$= \frac{\hbar^2 k_F^2}{3m^2} \left[\frac{1}{\frac{1}{2\bar{T}} L_1[\bar{k}] + \frac{1}{2\bar{T}} \frac{(L_2[\bar{k}])^2}{L_3[\bar{k}]}} + \frac{2}{\pi} \bar{a} \right]. \quad (\text{C.19})$$

È invece utile mostrare cosa diventa l'espressione del suono isotermico nel limite di temperatura nulla. Basta calcolarsi i limiti dei tre integrali:

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{T} \rightarrow 0} \frac{L_1[\bar{k}]}{2\bar{T}} &= \lim_{\bar{T} \rightarrow 0} \frac{\partial_{\bar{T}} L_1[\bar{k}]}{2} \\ &= \lim_{\bar{T} \rightarrow 0} \int_0^\infty d\bar{k} \bar{k}^2 \frac{\bar{\xi}_{\bar{k}}^2}{2\bar{E}_{\bar{k}}^3} \left[\frac{2\bar{E}_{\bar{k}}^2}{\bar{\xi}_{\bar{k}}^2} \operatorname{tgh} \Theta - 2 \operatorname{tgh} \Theta + \left(\frac{2\bar{T}\bar{E}_{\bar{k}}^2}{\bar{\xi}_{\bar{k}}^2} - 2\bar{T} - 2\bar{E}_{\bar{k}} \operatorname{tgh} \Theta \right) \partial_{\bar{T}} \operatorname{tgh} \Theta \right] \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{T} \rightarrow 0} \frac{L_2[\bar{k}]}{2\bar{T}} &= \lim_{\bar{T} \rightarrow 0} \frac{\partial_{\bar{T}} L_2[\bar{k}]}{2} \\ &= \lim_{\bar{T} \rightarrow 0} \int_0^\infty d\bar{k} \bar{k}^2 \frac{\bar{\xi}_{\bar{k}}}{2\bar{E}_{\bar{k}}^3} \left[-2 \operatorname{tgh} \Theta - (2\bar{T} + 2\bar{E}_{\bar{k}} \operatorname{tgh} \Theta) \partial_{\bar{T}} \operatorname{tgh} \Theta \right] \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{T} \rightarrow 0} \frac{L_3[\bar{k}]}{2\bar{T}} &= \lim_{\bar{T} \rightarrow 0} \frac{\partial_{\bar{T}} L_3[\bar{k}]}{2} \\ &= \lim_{\bar{T} \rightarrow 0} \int_0^\infty d\bar{k} \bar{k}^2 \frac{1}{2\bar{E}_{\bar{k}}^3} \left[2 \operatorname{tgh} \Theta + (2\bar{T} + 2\bar{E}_{\bar{k}} \operatorname{tgh} \Theta) \partial_{\bar{T}} \operatorname{tgh} \Theta \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Bisogna valutare il limite per la temperatura che va a zero della funzione¹ $\partial_{\bar{T}} \operatorname{tgh} \Theta$:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{T}} \tanh \left(\frac{\bar{E}_{\bar{k}}}{2\bar{T}} \right) = - \left[1 - \tanh^2 \left(\frac{\bar{E}_{\bar{k}}}{2\bar{T}} \right) \right] \frac{\bar{E}_{\bar{k}}}{2\bar{T}^2} \quad (\text{C.23})$$

$$= - \frac{2}{\bar{E}_{\bar{k}}} \frac{\Theta^2}{\cosh^2 \Theta} \quad (\text{C.24})$$

Usando ripetutamente il teorema di de l'Hospital per la variabile Θ , si ottiene:

$$= - \frac{4}{\bar{E}_{\bar{k}}} \frac{\Theta}{2 \cosh \Theta \sinh \Theta} \quad (\text{C.25})$$

$$= - \frac{2}{\bar{E}_{\bar{k}}} \frac{1}{\sinh^2 \Theta + \cosh^2 \Theta}. \quad (\text{C.26})$$

Quindi il contributo degli addendi contenenti la funzione (C.23) tende ad annullarsi in maniera più che esponenziale, via via che la temperatura va a zero.

$$\lim_{\bar{T} \rightarrow 0_+} \frac{\partial}{\partial \bar{T}} \tanh \left(\frac{\bar{E}_{\bar{k}}}{2\bar{T}} \right) = \lim_{\Theta \rightarrow +\infty} - \frac{2}{\bar{E}_{\bar{k}}} \frac{1}{\sinh^2 \Theta + \cosh^2 \Theta} = 0_-. \quad (\text{C.27})$$

¹Nota che tgh è la forma breve di \tanh .

Per cui nel limite di temperatura nulla i tre integrali diventano [49]:

$$\lim_{\bar{T} \rightarrow 0} \frac{L_1[\bar{k}]}{2\bar{T}} = \int_0^\infty d\bar{k} \frac{\bar{k}^2}{E_{\bar{k}}} \left[1 - \frac{\bar{\xi}_{\bar{k}}^2}{E_{\bar{k}}^2} \right] = \int_0^\infty d\bar{k} \frac{\bar{k}^2 \bar{\Delta}^2}{E_{\bar{k}}^3} \equiv \bar{\Delta}^2 J_2 \quad (\text{C.28})$$

$$\lim_{\bar{T} \rightarrow 0} \frac{L_2[\bar{k}]}{2\bar{T}} = - \int_0^\infty d\bar{k} \frac{\bar{k}^2 \bar{\xi}_{\bar{k}}}{E_{\bar{k}}^3} \equiv J_\xi \quad (\text{C.29})$$

$$\lim_{\bar{T} \rightarrow 0} \frac{L_3[\bar{k}]}{2\bar{T}} = \int_0^\infty d\bar{k} \frac{\bar{k}^2}{E_{\bar{k}}^3} \equiv J_2. \quad (\text{C.30})$$