

# Capitolo 17

## Generazione di segnali

Nei capitoli precedenti sono stati già descritti circuiti capaci di generare segnali persistenti sinusoidali (o quasi), come l'oscillatore a resistenza negativa (par. 12.8.3), l'oscillatore armonico (par. 13.3) e l'oscillatore a rotazione di fase (par. 15.5.2).

Le caratteristiche principali che determinano la qualità di un segnale (e del suo generatore) sono:

- precisione e stabilità della frequenza;
- precisione e stabilità della ampiezza;
- regolabilità della frequenza;
- purezza spettrale.

Di queste caratteristiche va subito detto che la seconda è la meno critica. In genere è sempre possibile con circuiti a valle del generatore correggere opportunamente l'ampiezza di un segnale.

Le caratteristiche di gran lunga più importanti sono invece la possibilità di ottenere da un generatore la frequenza voluta (regolabilità) in maniera accurata e stabile nel tempo. Come è facile da immaginare, queste caratteristiche sono di coesistenza difficile: ogni punto di regolazione presente in un circuito è anche un punto di *sregolazione*. Cioè, se nel circuito di un generatore compaiono componenti che ne determinano la frequenza ed il valore di questi componenti può essere variato per ottenere la frequenza desiderata, sarà inevitabile che questi componenti siano anche soggetti a derive tanto maggiori quanto più è grande il campo di variabilità del loro valore.

In definitiva, si possono realizzare generatori molto stabili, ma a costo di fare uso di elementi molto rigidi nella determinazione della frequenza (ad es., il cristallo piezoelettrico) e quindi con limitatissime possibilità di regolazione. Si possono realizzare generatori con una ottima possibilità di regolare la frequenza su un intervallo di valori anche molto ampio e con una grande risoluzione, ma con una stabilità inevitabilmente limitata.

Uno dei più importanti successi dell'elettronica di questi ultimi decenni è stato lo sviluppo di soluzioni circuitali che combinando opportunamente elettronica analogica e digitale, anche insieme alla reazione negativa, hanno permesso di realizzare generatori che offrono ottima regolabilità, precisione e stabilità di frequenza.

Un discorso a parte merita l'ultima caratteristica, la purezza spettrale. Un segnale ideale ha uno spettro *monocromatico*, contiene cioè una sola componente, con la frequenza desiderata.

Il segnale prodotto da un generatore reale ha uno spettro più complesso in cui compaiono:

- Armoniche superiori della frequenza fondamentale: il segnale è *distorto*.
- Segnali spurii a frequenze non correlate con la frequenza fondamentale: problema che si presenta in special modo nei generatori che fanno uso di elettronica digitale, le cui frequenze di funzionamento possono generare interferenze.
- Rumore, che va distinto tra un fondo di rumore continuo su tutte le frequenze, come è presente in tutti i circuiti reali, ed un rumore concentrato in una stretta banda di frequenze intorno alla frequenza fondamentale, per cui lo spettro del segnale non è più composto da una sola *riga* nel senso geometrico del termine, ma piuttosto da una distribuzione, normalmente a campana, intorno alla frequenza fondamentale. Questo è il *rumore di fase* (par. 17.3).

Nei tre esempi di generatori richiamati all'inizio del capitolo compaiono tre elementi base:

- un anello di reazione contenente amplificazione e reazione *positiva*;
- una rete il cui comportamento in funzione della frequenza determina la frequenza di oscillazione;
- un meccanismo di regolazione che garantisce l'avvio e la crescita dell'oscillazione e poi il raggiungimento e mantenimento di uno stato stazionario in cui l'ampiezza dell'oscillazione rimane costante.

I circuiti che fanno uso di reti *RC* per la determinazione della frequenza, come l'oscillatore armonico del par. 13.3 o l'oscillatore a rotazione di fase del par. 15.5.2 sono adatti soprattutto per segnali di bassa frequenza, anche per il vantaggio che offrono di non avere bisogno di induttanze, che nel campo delle basse frequenze sono componenti con moltissimi problemi.

Il generatore del par. 12.8.3, invece, usa per determinare la frequenza un circuito risonante *LC*, accoppiato ad un circuito amplificatore con reazione positiva, per compensare le perdite nell'induttanza e nel condensatore e generare oscillazioni persistenti.

Questa soluzione è quella di gran lunga più usata per la generazione di segnali ad alta frequenza.

## 17.1 Anello con reazione positiva. Il *moltiplicatore di Q*

Mentre la reazione negativa, come visto al cap. 11, può essere usata per ridurre la dipendenza dalla frequenza del guadagno di un amplificatore, la reazione positiva può essere utilizzata per produrre l'effetto opposto, ad esempio per aumentare la selettività di un circuito risonante.

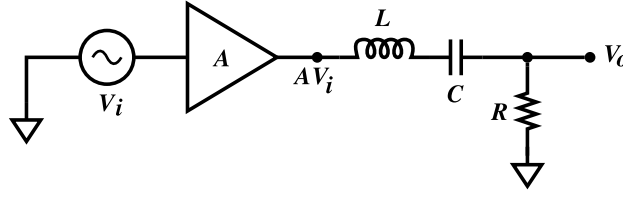


Figura 17.1: Amplificatore selettivo composto da un amplificatore  $A$  a larga banda seguito da un filtro passa-banda formato da un circuito risonante  $LRC$ .

Nella fig. 17.1 l'amplificatore  $A$  è seguito da un filtro passa-banda composto da un circuito risonante serie  $LC$  che forma con la resistenza  $R$  un partitore selettivo. Se si suppone  $A$  indipendente dalla frequenza, almeno nell'intorno della frequenza di risonanza del circuito  $LC$ , il guadagno complessivo della rete sarà

$$G_0 = \frac{V_o}{V_i} = A \cdot \frac{R}{R + j \left( 2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC} \right)} = \frac{A}{1 + jQ_0 \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)} \quad (17.1)$$

dove  $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$  è la frequenza di risonanza del circuito  $LC$  e  $Q_0 = 2\pi f_0 L/R$  è il fattore di merito alla risonanza in presenza della resistenza  $R$  (considerando trascurabili la resistenza dovuta alle perdite di  $L$  e  $C$  e la resistenza di uscita dell'amplificatore  $A$ ).

Per  $\Delta f = f - f_0 \ll f_0$  l'espressione tra parentesi può essere approssimata da

$$\left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) = \frac{f^2 - f_0^2}{f_0 f} = \frac{(f - f_0)(f + f_0)}{f_0 f} \simeq \frac{2\Delta f}{f_0} \quad (17.2)$$

e quindi

$$G_0 = \frac{V_o}{V_i} = \frac{A}{1 + 2jQ_0\Delta f/f_0} \quad (17.3)$$

In fig. 17.2 è riportato l'andamento di  $|G_0|^2 = |V_o/V_i|^2$  per  $Q_0 = 10$  e  $A = 1$ , calcolato con l'approssimazione 17.2-17.3 (curva verde) e con l'espressione esatta 17.1 (curva rossa).

In fig. 17.3 il circuito è stato modificato realizzando un anello a reazione positiva che riporta il segnale  $V_o$  all'ingresso e lo somma a  $V_i$ .

Secondo quanto visto nel cap. 11, fino a che  $A < 1$ , l'eq. 11.3 fornisce correttamente la risposta del circuito ad un segnale sinusoidale stazionario:

$$G = \frac{G_0}{1 - \beta G_0} = \frac{\frac{A}{1 + 2jQ_0\Delta f/f_0}}{1 - \frac{A}{1 + 2jQ_0\Delta f/f_0}} = \frac{A}{1 - A + 2jQ_0\Delta f/f_0} \quad (17.4)$$

Riscrivendo questo risultato nella forma

$$G = \frac{A}{1 - A} \cdot \frac{1}{1 + 2j \frac{Q_0}{1 - A} \cdot \frac{\Delta f}{f_0}} \quad (17.5)$$

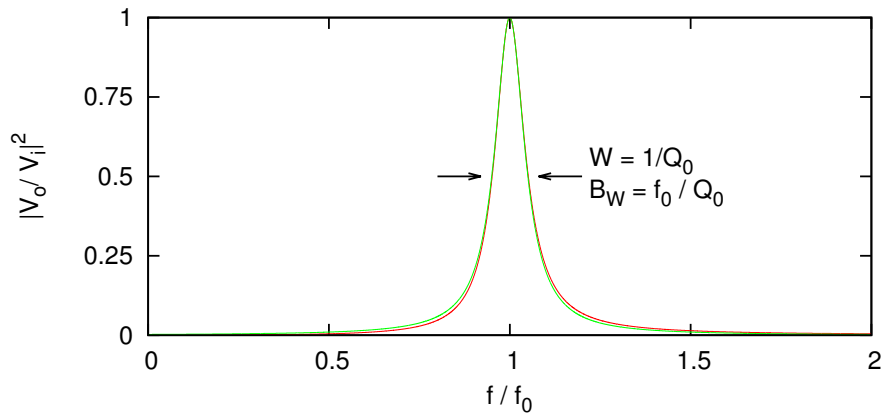


Figura 17.2: Curva di selettività di un circuito risonante con  $Q_0 = 10$ . La curva in verde è stata calcolata con l'espressione approssimata 17.3, quella in rosso con l'espressione esatta 17.1. La larghezza della curva a metà altezza è pari a  $W = 1/Q_0$ , corrispondente alla *larghezza di banda*  $B_W = f_0/Q_0$ .

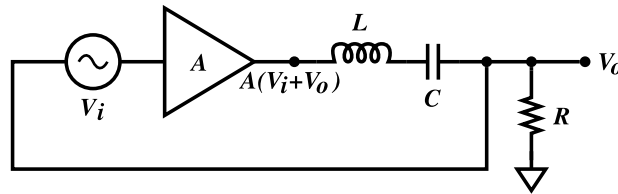


Figura 17.3: L'amplificatore di fig. 17.1 con il segnale  $V_0$  all'uscita, filtrato dal circuito risonante  $LRC$ , sommato al segnale di ingresso in modo da formare un anello con reazione positiva.

si vede che il circuito con reazione positiva presenta un guadagno ed un fattore di merito moltiplicati entrambi per il fattore  $1/(1 - A)$  rispetto a quelli che avrebbe ad anello aperto (questo naturalmente sarà vero anche per tutte le altre caratteristiche del circuito che venivano attenuate dalla reazione negativa e che invece verranno esaltate: distorsione, dipendenza dai valori dei parametri etc).

Nel circuito di fig. 17.3 ad anello chiuso, per  $A$  che tende asintoticamente ad 1, il guadagno  $G$  ed il fattore di merito  $Q_0$  vanno entrambi ad infinito. In questa condizione idealmente il circuito, avendo guadagno infinito, può fornire una tensione di uscita  $V_o$  anche in presenza di una tensione di ingresso  $V_i$  nulla e quindi diventare un generatore di segnali. Infatti, nel piano complesso del diagramma di Nyquist il tracciato del guadagno d'anello che compare nella eq. 17.4 per  $A = 1$  passa due volte esattamente per il punto  $\{-1,0\}$  (fig. 17.4). Questo indica la presenza di due zeri coniugati sull'asse  $j\omega$ , che difatti si trovano in corrispondenza dei punti  $\pm 2j\pi f_o$ , come la coppia  $S_3, S_3^*$  in fig. 15.4.

Questa condizione è riassunta nel *criterio di Barkhausen*: un anello con reazione positiva è sede di oscillazioni persistenti stazionarie quando il guadagno d'anello è *esattamente*  $\{1,0\}$ .

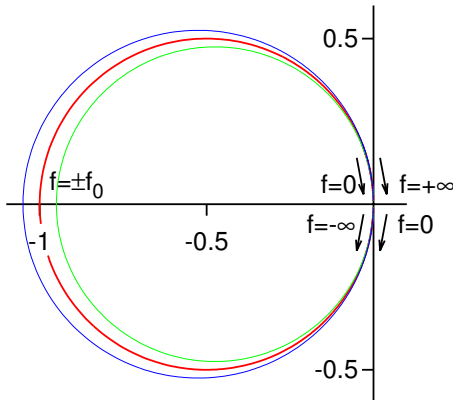


Figura 17.4: Diagramma di Nyquist per il circuito di fig. 17.3. La curva in rosso, ottenuta con  $A = 1$ , passa due volte esattamente per il punto  $\{-1, 0\}$ : il percorso della curva viene seguito una prima volta per  $f$  che va da  $-\infty$  a  $0$ , con il punto  $\{-1, 0\}$  in corrispondenza della frequenza  $-f_0$  ed una seconda volta per  $f$  che va da  $0$  a  $+\infty$ , con il punto  $\{-1, 0\}$  in corrispondenza della frequenza  $+f_0$ . Le altre due curve sono state ottenute con i valori  $A = 0.95$  (curva verde) e  $A = 1.05$  (curva blu). La curva verde non racchiude il punto  $\{-1, 0\}$  e quindi corrisponde ad un comportamento di transitorio con oscillazione smorzata; la curva blu racchiude il punto  $\{-1, 0\}$  e corrisponde ad un transitorio che cresce esponenzialmente.

In base a questa analisi la tensione all'uscita del circuito dovrebbe essere un'oscillazione perfetta con andamento  $V_0 \cos(2\pi f_o t + \varphi)$ , con ampiezza di picco  $V_0$  costante. Nella realtà le cose sono più complicate.

Come si è già visto nel par. 13.3, *esattamente* non è una condizione che si possa ottenere e mantenere stabilmente in una rete reale. Qualunque minima deriva del valore di  $A$  porterà i due zeri da  $\pm 2j\pi f_o$  a  $\pm \epsilon \pm 2j\pi f_o$ , con la comparsa quindi di un termine di smorzamento positivo o negativo  $e^{\pm \epsilon t}$  che farà crescere o decadere l'oscillazione. Questo problema può essere risolto dotando il circuito di un sistema attivo di regolazione come quello in fig. 13.5 che, misurando l'ampiezza del segnale  $V_o$  all'uscita, intervenga aumentando o diminuendo leggermente il valore di  $A$  non appena  $V_o$  accenna a diminuire o ad aumentare. Nella pratica molto spesso questo risultato viene raggiunto impostando  $A > 1$  per livelli di segnale piccoli e lasciando poi crescere l'ampiezza della tensione  $V_o$  dell'oscillazione fino a che la saturazione dell'amplificatore non riduce il valore effettivo di  $A$  ad 1. Ogni deriva successiva del valore di  $A$  verrà compensata da una leggera variazione di  $V_o$ .

Un esempio di circuito di questo tipo è l'*oscillatore Colpitts*, descritto nel paragrafo seguente.

## 17.2 Oscillatore Colpitts

L'amplificatore accordato descritto nella fig. 16.13b può essere facilmente trasformato in un generatore di segnali, collegando l'uscita (*out*) con l'ingresso (*in*) realizzando così, secondo lo schema di principio di fig. 17.3, un circuito oscillatore noto come *oscillatore Colpitts* (fig. 17.5).

Il rapporto tra i due condensatori  $C_1$  e  $C_2$  deve essere scelto in modo da avere un guadagno d'anello complessivo maggiore di uno. Normalmente, anzi, si fa in modo che il guadagno d'anello sia decisamente maggiore di uno, lasciando poi alla saturazione del transistor il compito di limitare e stabilizzare l'ampiezza dell'oscillazione. La distorsione del segnale che ne consegue non è un grosso problema in questo tipo di circuiti, perchè la presenza del circuito risonante  $LC$  garantisce una buona soppres-

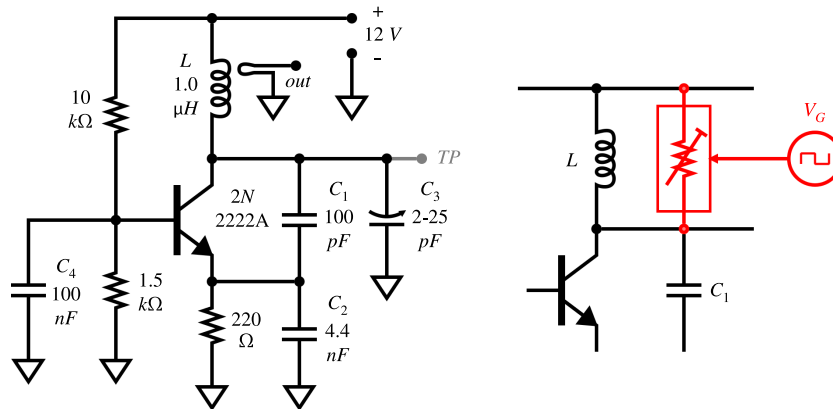


Figura 17.5: Schema elettrico di un oscillatore *Colpitts*. Con i valori dei componenti indicati la frequenza di oscillazione è di 13...15 MHz, regolabile tramite il condensatore variabile  $C_3$ .

sione delle armoniche, almeno fino a che il suo fattore di merito  $Q_0$  è sufficientemente elevato ed il tasso di distorsione non raggiunge livelli eccessivi.

In fig. 17.6 è riportata la registrazione, effettuata tramite un oscilloscopio digitale, della nascita, crescita e stabilizzazione dell'oscillazione, misurata sul *test point TP*.

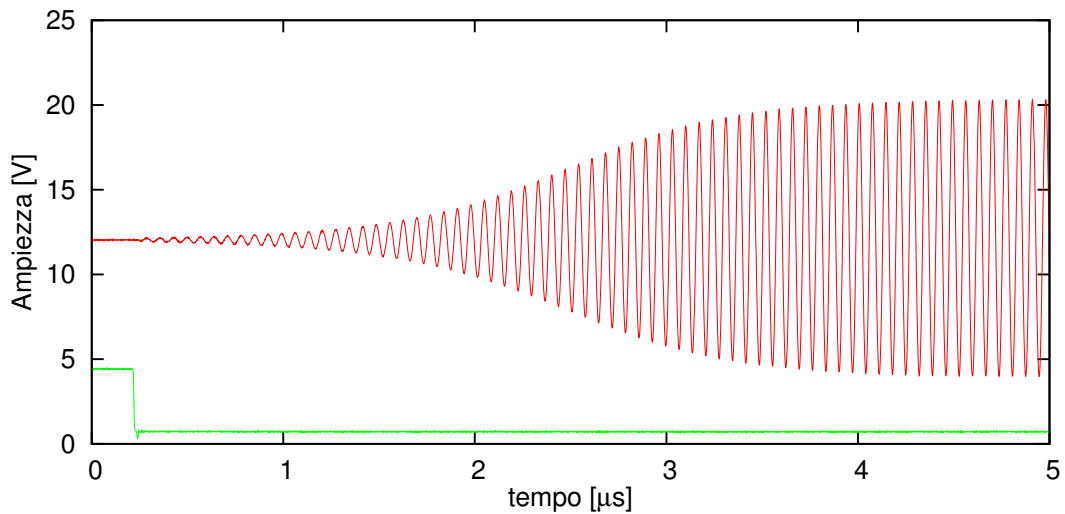


Figura 17.6: Crescita e stabilizzazione dell'ampiezza del segnale nell'oscillatore *Colpitts* di fig. 17.5.

Per effettuare questa misura è stato utilizzato il circuito modificato come indicato nella fig. 17.5, a destra, in rosso: in parallelo al circuito risonante è stato aggiunto un transistor *jfet* in funzione di resistenza variabile, comandato dal generatore  $V_G$ , che era programmato per inviare un'onda quadra. I valori del circuito sono stati aggiustati in modo da avere, con il transistor *jfet* acceso, un guadagno d'anello minore di uno e spegnere l'oscillazione; viceversa, con il transistor spento, il guadagno d'anello

torna a valori maggiori di uno e l'oscillazione può nascere e crescere.

Il segnale a gradino in verde nella figura è il fronte di discesa dell'onda quadra, che comanda lo spengimento del *fet*. L'oscillazione nasce dalla piccola perturbazione indotta nel circuito risonante dall'onda quadra attraverso la capacità *gate-drain* del *fet*. In assenza di questa, l'oscillazione avrebbe origine comunque da ogni minima fluttuazione dovuta al rumore di agitazione termica sempre presente nei circuiti elettrici. Nel grafico si vede chiaramente come l'oscillazione cresce di ampiezza con andamento esponenziale per circa  $2 \mu s$  e poi, in corrispondenza dell'ampiezza di  $\pm 5 V$ , comincia a crescere sempre più lentamente fino a che non si stabilizza asintoticamente intorno a circa  $\pm 8 V$ .

Nella figura 17.7 è riportato lo spettro del segnale generato una volta raggiunto il livello stazionario. L'intensità del segnale alla frequenza fondamentale  $f_0 = 15.2 MHz$  è di  $-2.1 dBm$  ( $dBm = decibel$  rispetto ad  $1 mW$ ). La seconda armonica, a frequenza  $2f_1$ , si trova a  $-40 dBm$ , quindi a  $38 dB$  al di sotto della fondamentale: circa 10000 volte più piccola. La quinta armonica, di intensità  $-83 dBm$ , si trova circa  $3 dB$  sopra il fondo di rumore dell'analizzatore di spettro.

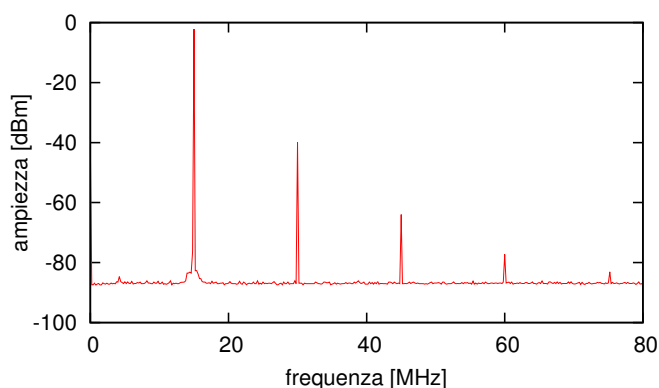


Figura 17.7: Spettro del segnale all'uscita del generatore di fig. 17.5. La frequenza fondamentale è  $f_1 = 15.2 MHz$ , con una ampiezza di  $-2.1 dBm$ . Si vedono le prime cinque armoniche, con intensità via via decrescente:  $-38$ ,  $-62$ ,  $-75$  e  $-81 dB$  rispetto alla fondamentale.

### 17.2.1 Stabilità della frequenza

Una delle prestazioni più importanti richieste ad un generatore di segnali, sia nelle applicazioni in telecomunicazioni sia nel campo della strumentazione scientifica, è la precisione e la stabilità della frequenza generata. Le due cause principali di deriva della frequenza sono le variazioni della tensione di alimentazione e le variazioni di temperatura. Per un circuito simile a quello di fig. 17.5 queste derivate sono riportate nella fig. 17.8 (curve in rosso, scale dei valori a sinistra).

Nel grafico in alto è riportata la deriva al variare della tensione di alimentazione di  $2 V$  in più o in meno rispetto al valore nominale di  $12 V$ . Nel grafico in basso la deriva al variare della temperatura tra  $26$  e  $42 ^\circ C$ . I coefficienti di deriva sono rispettivamente  $-21 kHz/V$  (a  $12 V$ ) e  $2.3 kHz/^\circ C$  (a  $34 ^\circ C$ ) intorno alla frequenza nominale di  $12.7 MHz$ . In condizioni ambientali ordinarie si può avere facilmente una escursione di temperatura di  $10 ^\circ C$  nell'arco di una giornata ed anche di  $40 ^\circ C$  tra una stagione e l'altra. Questo porta a fluttuazioni della frequenza generata fino a  $\pm 46 kHz$ , pari a  $\pm 0.36\%$  della frequenza nominale. Un orologio controllato da questo

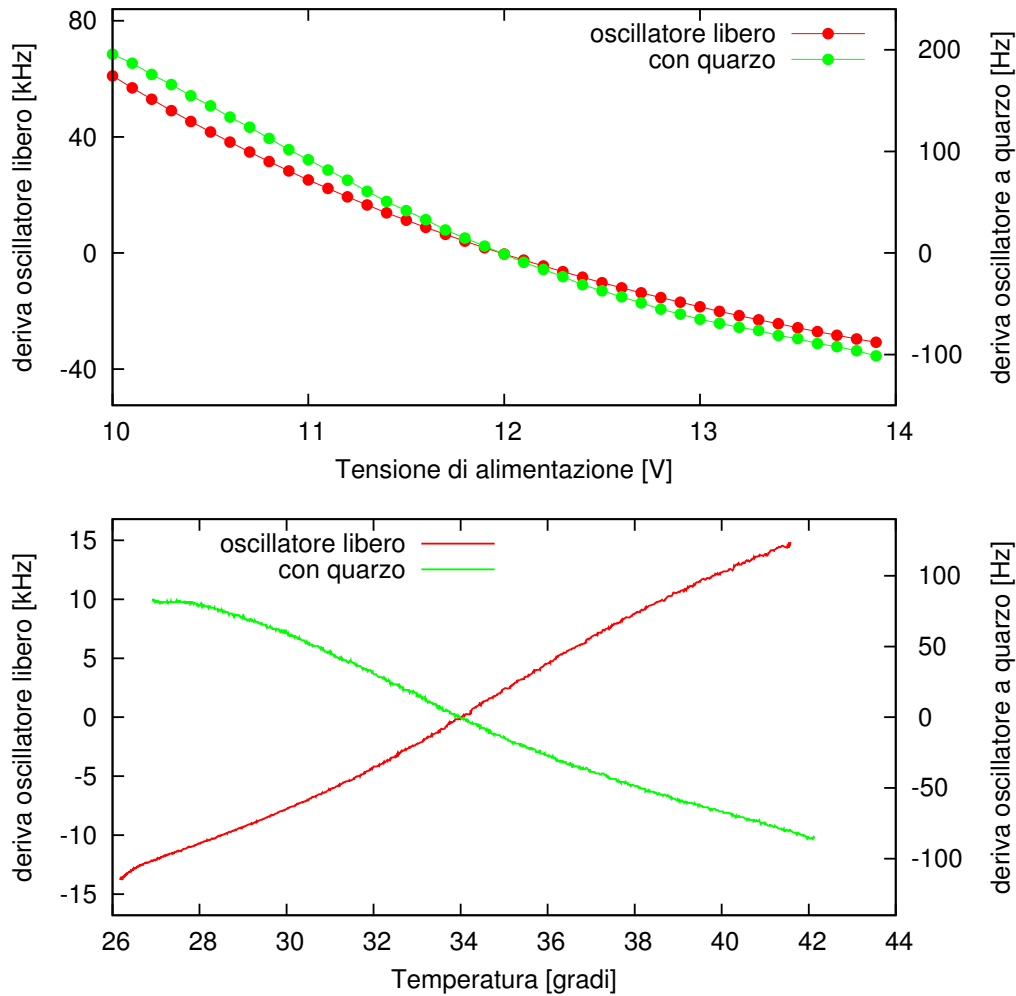


Figura 17.8: Deriva della frequenza in funzione della tensione di alimentazione (in alto) e della temperatura (in basso). Le curve rosse (con scala dei valori a sinistra) si riferiscono al generatore controllato dal solo circuito risonante  $LC$ ; le curve verdi (scala dei valori a destra) al generatore controllato da un cristallo di quarzo. Attenzione: la scala a sinistra è in  $kHz$ , quella a destra in  $Hz$ .

generatore potrebbe accumulare nell'arco di una giornata un errore di diversi minuti; sarebbe un orologio di qualità decisamente scadente.

Lasciando il controllo della frequenza a componenti come induttanze e capacità (e quindi anche agli effetti delle capacità parassite, come ad esempio la capacità collettore-base del transistor) non è facile ottenere prestazioni molto migliori.

### 17.2.2 Oscillatore a quarzo

Per ottenere una migliore stabilità di frequenza da un oscillatore è necessario accoppiare al circuito un risonatore che abbia una frequenza di risonanza il più possibile insensibile alle condizioni ambientali ed un fattore di merito  $Q$  molto elevato,



in modo che sia questo l'elemento di gran lunga preponderante nello stabilire la frequenza di oscillazione del circuito.

Una soluzione molto semplice e molto usata in elettronica è l'utilizzo di un risonatore meccanico formato da una lamina di cristallo di quarzo. Le caratteristiche meccaniche del cristallo di quarzo sono molto stabili sia al variare della temperatura, sia per quanto riguarda l'invecchiamento con il passare del tempo. Il fatto che il quarzo sia un materiale piezoelettrico permette di accoppiare facilmente il risonatore meccanico al circuito elettronico semplicemente utilizzando la lamina come dielettrico di un condensatore.

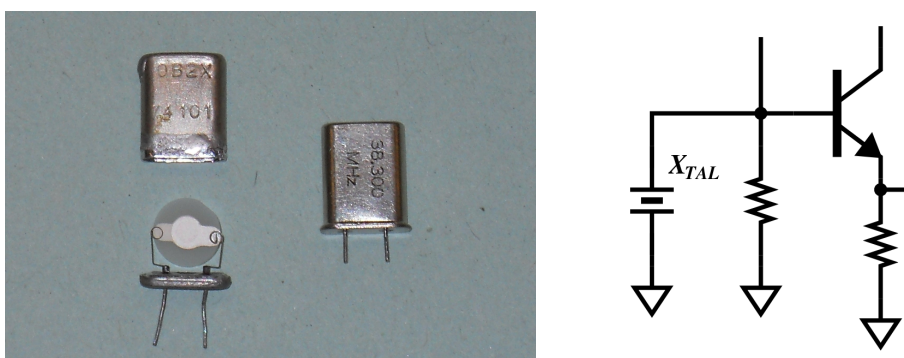


Figura 17.9: Nella foto, a sinistra: lamina di quarzo estratta dal contenitore, con gli elettrodi metallici depositati sulle due facce; a destra: il cristallo incapsulato nel suo contenitore, pronto per l'uso. Lo schema elettrico a destra indica come il cristallo di quarzo può essere inserito nel circuito oscillatore di fig. 17.5, prendendo il posto del condensatore  $C_4$ .

Nella fig. 17.9 si vede, a sinistra nella foto, come è realizzato in pratica il risonatore: una sottile lamina (la frequenza di risonanza dipende dallo spessore), di forma circolare (ma può essere anche quadrata o rettangolare), con due elettrodi metallici depositati sulle due facce e collegati ai terminali. Una volta incapsulata nel suo contenitore, si presenta come si vede a destra nella foto. Nello schema elettrico, a destra nella figura, è riportato il simbolo circuitale del risonatore al quarzo ( $X_{TAL}$ ), inserito nel circuito dell'oscillatore di fig. 17.5 in sostituzione del condensatore  $C_4$ .

Elettricamente il risonatore meccanico al quarzo equivale ad un circuito risonante  $RLC$  serie; in parallelo a questo si viene a trovare la capacità degli elettrodi, per cui il circuito equivalente complessivo è quello riportato in fig. 17.10 in alto; in basso è riportato l'andamento di modulo e fase dell'impedenza in funzione della frequenza nell'intorno della risonanza. Si osservano due risonanze: la prima, ad una frequenza più bassa ( $f_s$ ), è la *risonanza serie* del circuito  $RLC_s$  (leggermente corretta dalla presenza di  $C_p$ ) ed è caratterizzata dal minimo dell'impedenza (circa  $10 \Omega$  per l'esemplare di cristallo utilizzato nella misura); la seconda, ad una frequenza  $f_p$  più alta di circa  $25 kHz$  rispetto ad  $f_s$ , è la *risonanza parallelo*, caratterizzata da un massimo dell'impedenza (oltre  $100 k\Omega$ ), e generata dal comportamento induttivo di  $RLC_s$  in parallelo a  $C_p$  per frequenze  $f > f_s$ .

Poichè il circuito amplificatore su cui è costruito l'oscillatore è di tipo *base a massa*, è la frequenza  $f_s$  quella che realizza la condizione di massima amplificazione

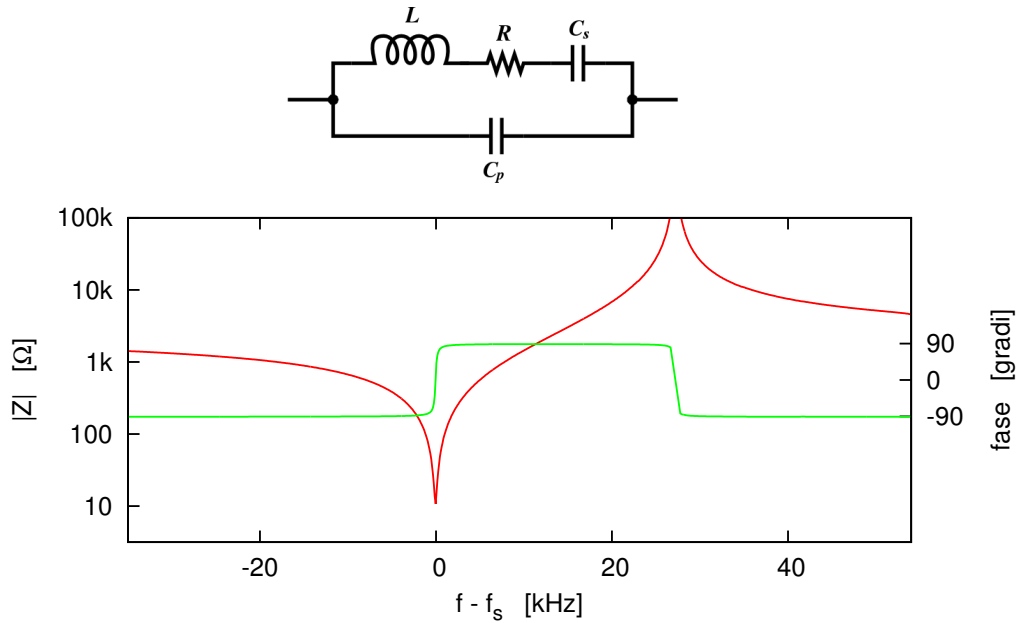


Figura 17.10: Circuito elettrico equivalente di un risonatore al quarzo e sua impedenza complessa in funzione della frequenza, in modulo (curva rossa) e fase (curva verde). Il circuito  $RLC_s$  serie corrisponde all'elemento piezoelettrico; il condensatore  $C_p$  corrisponde alla capacità tra gli elettrodi. La frequenza  $f_s$  per il dispositivo utilizzato per questa misura è  $12762.4 \text{ kHz}$ .

e quindi corrisponde alla frequenza di oscillazione. Il fatto che la fase vari molto rapidamente da  $-90^\circ$  a  $+90^\circ$  intorno a  $f_s$  fa sì che uno spostamento lievissimo di  $f$  da  $f_s$  possa compensare eventuali errori o fluttuazioni nella fase del guadagno d'anello dagli  $0^\circ$  esatti necessari per avere l'oscillazione stabile.

Le derivate misurate sul circuito modificato secondo lo schema di fig. 17.9 sono riportate in verde nella fig. 17.8. Nelle stesse condizioni operative utilizzate per l'oscillatore libero, si hanno rispettivamente  $-79 \text{ Hz/V}$  e  $-15 \text{ Hz/}^\circ\text{C}$  al variare della tensione di alimentazione e della temperatura. Il miglioramento nella stabilità è di oltre due ordini di grandezza per entrambe le derivate.

Come si può facilmente intuire, il miglioramento nella stabilità del segnale ha un prezzo come contropartita: nel circuito di fig. 17.5 è possibile variare facilmente la frequenza del segnale generato, anche di alcuni  $\text{MHz}$ , ad esempio utilizzando per  $C_3$  un condensatore variabile meccanico oppure un diodo *varicap*, la cui capacità di transizione dipende dalla tensione di contropolarizzazione applicata; nel circuito modificato, con la frequenza controllata dal cristallo di quarzo, le variazioni possibili sono solo di poche centinaia di  $\text{Hz}$  o al massimo qualche  $\text{kHz}$ .

### 17.3 Rumore di fase

Come anticipato nell'introduzione al capitolo, una delle caratteristiche più importanti dei segnali prodotti da un generatore è la loro *purezza spettrale*.

Ogni circuito reale presenta un certo livello di non linearità, che si traduce in distorsione dei segnali e generazione di armoniche; anzi, il principio di funzionamento descritto nei par. 17.1 e 17.2 ha messo in evidenza come un certo tasso di distorsione, sia pure minimo, è fisiologico al mantenimento dello stato stazionario nel funzionamento di un oscillatore.

Un basso contenuto armonico quindi è sicuramente un segno di buona qualità per un generatore. Tuttavia, le armoniche sono segnali con frequenze che sono multipli interi della frequenza fondamentale, e quindi facilmente separabili o eliminabili tramite filtri abbastanza semplici.

Un'altra fonte di segnali spurii che limita la purezza spettrale di un generatore è data dal fatto che nel circuito di fig. 17.3 non si può porre semplicemente  $V_i = 0$ .

Qualunque circuito fisico, per quanto perfetto, contiene sempre numerose sorgenti di rumore, prima di tutto il rumore Johnson legato a tutte le componenti resistive del circuito e poi le varie sorgenti di rumore legate ai meccanismi fisici di funzionamento dei dispositivi attivi, diodi e transistor. Si può tenere conto dell'effetto complessivo di tutte queste sorgenti di rumore inserendo all'ingresso dell'amplificatore  $A$ , al posto del generatore  $V_i$  o in serie a questo, un *generatore equivalente di rumore*  $U_n$  che riproduca all'uscita l'effetto complessivo di tutti i generatori di rumore presenti. La presenza di questo rumore farà sì che il segnale all'uscita non possa più essere considerato un segnale *monocromatico puro*, cioè una sinusoide perfetta, ma abbia una composizione spettrale più complessa. In ogni istante il valore effettivo della tensione  $v_o(t)$  differirà in più o in meno dal valore teorico  $V_0 \cos(2\pi ft + \varphi)$ , come se l'oscillazione stesse leggermente ritardando o anticipando: la fase del segnale non sarà più esattamente  $2\pi ft + \varphi$ , ma  $2\pi ft + \varphi + \delta$ , con  $\delta$  variabile aleatoria. Da qui il termine *rumore di fase* per questo effetto.<sup>1</sup>

Nell'analisi che segue sarà necessario supporre che la rete sia lineare, quindi si supporrà di avere un sistema di regolazione attivo, come quello di fig. 13.5, anche se poi nella pratica si utilizzerà il metodo di far leggermente saturare il dispositivo amplificatore. Normalmente la distorsione così introdotta si mantiene a livelli sufficientemente bassi da non alterare sensibilmente i risultati.

In presenza di un generatore di rumore  $U_n$  al posto di  $V_i$ , l'eq. 17.4 diventa

$$U_o = \frac{A}{1 - A + j2Q_0\Delta f/f_0} \cdot U_n \quad (17.6)$$

In questa equazione  $U_n$  non è l'ampiezza di una tensione nel senso abituale, ma una *densità spettrale di tensione* e sarà quindi espressa in  $V/\sqrt{Hz}$ . Di conseguenza anche  $U_o$  sarà adesso una densità spettrale di tensione, espressa nelle stesse unità; ad ogni intervallo di frequenza  $df$  corrisponde un contributo quadratico alla tensione efficace di rumore  $dV_n^2 = U_n^2 df$ .

La potenza  $P_o$  presente in uscita al circuito sulla resistenza  $R$  sarà data dal contributo di tutte le componenti spettrali presenti nel segnale  $U_o$ . Dalla eq. 17.6:

$$P_o = \int_0^\infty \frac{U_o^2(f)}{R} df = \frac{1}{R} \int_0^\infty \frac{U_n^2 A^2}{(1 - A)^2 + 4Q_0^2(\Delta f/f_0)^2} df \quad (17.7)$$

<sup>1</sup>Anche la quantità  $V_0$  viene modulata nel tempo dal rumore, ma poichè i due effetti si sommano in modo inseparabile, vengono cumulativamente indicati con il termine *rumore di fase*.

Utilizzando la relazione

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{b}{a} \cdot x\right)$$

con  $x = f - f_0 = \Delta f$ ,  $dx = df$ ,  $a = (1 - A)$  e  $b = 2Q_0/f_0$  si ottiene<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} P_o &= \frac{U_n^2 A^2}{R} \cdot \frac{1}{(1 - A)2Q_0/f_0} \cdot \left[ \arctan\left(\frac{2Q_0}{1 - A} \cdot \frac{f - f_0}{f_0}\right) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{U_n^2 A^2}{R} \cdot \frac{f_0}{2(1 - A)Q_0} \cdot \pi \end{aligned} \quad (17.8)$$

In generale  $A$  sarà veramente molto vicina ad 1, per cui si può sostituire nell'ultima equazione  $A^2 \simeq 1$  e poi risolvere per  $(1 - A)$ :

$$(1 - A) = \frac{\pi}{2} \frac{f_0}{Q_0} \frac{U_n^2}{RP_o} \quad (17.9)$$

Il rapporto tra la densità spettrale  $U_n^2$  del rumore all'ingresso dell'amplificatore e la potenza  $P_o$  del segnale all'uscita che viene riportato all'ingresso come reazione positiva, insieme alle caratteristiche  $f_0$  e  $Q_0$  del circuito risonante che fa da filtro, determinano quanto piccolo sia il valore di  $(1 - A)$ .

Sostituendo l'espressione 17.9 nella 17.6, e ponendo a numeratore  $A \simeq 1$ , si ottiene la densità spettrale di potenza del segnale:

$$P(f) = \frac{U_0^2(f)}{R} = \frac{U_n^2/R}{(1 - A)^2 + (2Q_0\Delta f/f_0)^2} = \frac{P_o}{\pi f_2} \cdot \frac{1}{1 + (\Delta f/f_2)^2} \quad (17.10)$$

con

$$f_2 = \frac{\pi}{4} \frac{f_0^2}{Q_0^2} \frac{U_n^2}{RP_o} = \frac{\pi}{4} \frac{f_0^2}{Q_0^2} \frac{4kT}{P_o} \quad (17.11)$$

L'equazione 17.10 descrive una curva a campana con una semilarghezza a metà altezza pari a  $f_2$ . Supponendo di avere, per esempio, un circuito con  $f_0 = 100 \text{ MHz}$ ,  $Q_0 = 10$ ,  $R = 100 \text{ } \Omega$ ,  $P_o = 10 \text{ mW}$  (pari a  $V_o = 1 \text{ V}_{RMS}$ ) e che la resistenza  $R$  sia l'unica fonte di rumore presente nel circuito, si ha

$$\begin{aligned} U_n^2 &= 4kTR = 4 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 \times 100 = 1.66 \times 10^{-18} \text{ V}^2/\text{Hz} \\ f_2 &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{10^{16}}{10^2} \cdot \frac{1.66 \times 10^{-18}}{10^2 \times 10^{-2}} = 1.3 \times 10^{-4} \text{ Hz} \end{aligned} \quad (17.12)$$

In una situazione reale la potenza del segnale riportato all'ingresso è solo una frazione relativamente piccola del segnale totale presente all'uscita dell'amplificatore ed il rumore effettivo può essere notevolmente superiore a quello della sola resistenza di ingresso. Questo può portare a valori di  $f_2$  più grandi anche di alcuni ordini di

---

<sup>2</sup>Poichè  $1 - A$  è veramente molto piccolo, si ha  $\arctan\left(\frac{-2Q_0}{1 - A}\right) \simeq -\frac{\pi}{2}$

grandezza. Ad esempio, supponendo che il rumore effettivo sia di 10  $dB$  superiore al puro rumore Johnson della resistenza, si ha

$$f_2 = 1.3 \times 10^{-3} \text{ Hz}$$

In grafico si otterrebbe lo stesso andamento di fig. 17.2, ma con un picco veramente molto molto stretto. È quindi ragionevole associare con ottima precisione tutta la potenza del segnale alla frequenza centrale  $f_0$ , la *portante*, di ampiezza  $V_o$ :  $P_o = V_o^2/R$ . La potenza associata a frequenze che distano da  $f_0$  anche solo di pochi  $Hz$  è quasi evanescente.

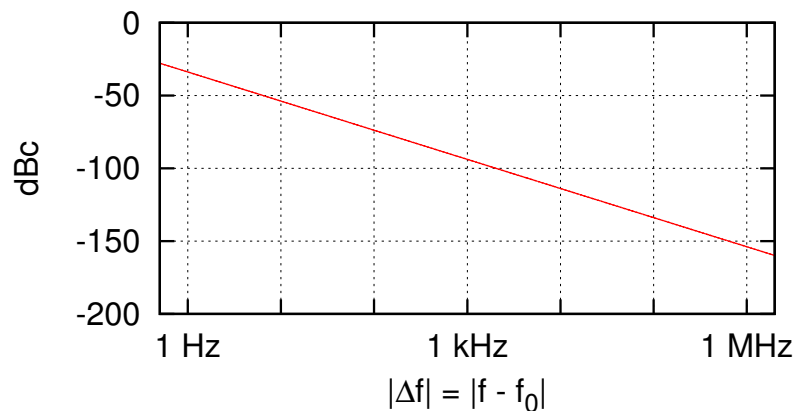


Figura 17.11: Spettro del rumore di fase del generatore di segnale corrispondente all'esempio di eq. 17.12.

Le cose però appaiono molto diverse se gli stessi dati sono osservati su una scala logaritmica. In fig. 17.11 viene riportata la funzione 17.10 espressa in unità  $dBc$ , cioè come rapporto tra la potenza associata ad una larghezza di banda convenzionale di 1  $Hz$  a distanza  $\Delta f$  dalla portante e la potenza della portante (che praticamente coincide con la potenza totale). La lettera  $c$  in  $dBc$  sta per *carrier* (portante). Quindi  $dBc = \text{decibel rispetto alla portante}$ .

Con questa definizione, con  $f_2$  in  $Hz$ , si ha

$$dBc[P(f)] = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_o^2(f)}{RP_o} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left[ \frac{1}{\pi f_2} \cdot \frac{1}{1 + (\Delta f/f_2)^2} \right] \quad (17.13)$$

Come si vede, le bande laterali di rumore si riducono di intensità al ritmo di 20  $dB$  per decade di frequenza. Ma ancora ad una distanza di 50  $kHz$  dalla portante hanno una intensità di  $-128 \text{ dBc}$ . Un eventuale altro segnale presente a questa distanza dalla portante, che occupi ad esempio una banda di 2  $kHz$ , sarebbe disturbato da un rumore con una potenza pari a  $-128 + 33 = -95 \text{ dB}$  rispetto alla portante. Questo è un effetto per niente trascurabile in molte situazioni in cui si ha a che fare con strumenti molto sensibili come un ricevitore radio, un analizzatore di spettro o un radiotelescopio, in grado di elaborare segnali che si estendono su scale che possono arrivare a 120  $dB$  di dinamica.

